ある楕円曲線の有理点の退化の様子とその展開係数について

上森雅功　坂田晴　代田幸之輔　中原詩麻　毛利哲平

1 次や 2 次の方程式で表される曲線は有理曲線と呼ばれ、曲線が 1 つでも有理点を持てば無限個の有理点が存在する。一方、楕円曲線に代表される 3 次曲線では有理点の存在に関してまだ知られていないことが多く存在し、古くから研究の対象となっている。ここで、楕円曲線とは y^2=(x の 3 次式)と表される曲線のうち、(x の 3 次式)が重解を持たないようなものである。

楕円曲線の係数に文字 t を付与した y^2=(係数に t を含む x の 3 次式)なる曲線を考えると、t が特定の値をとる場合に、曲線は退化して楕円曲線ではなくなる。こういった場合に得られる(楕円曲線ではない)曲線は特異ファイバーと呼ばれ、1964 年に小平邦彦によって分類された。

楕円曲線 y^2=x^3-x+t^2 は A2 型の楕円曲線で、t→∞に特異ファイバーを持つ(小平の分類では I3 型)。また、この楕円曲線上には自明に 6 点の有理点(0,t),(1,t),(-1,t)(0,-t),(1,-t),(-1,-t)が存在し、これら 6 点から生成される有理点の系列は六角格子(A2 型)の構造を持つ。

本研究では、これら 6 つの有理点から生成される有理点の系列の t→∞における振る舞いを調べるとともに、t→∞における各点の展開係数を求めることを試みた。