級数で定義された関数は元の関数の性質を満たすのか

課題研究 第 6 班 (数学) 「オイラーに学ぶ」
土井 遥希　中野 朱莉　中村 恭爽　舩本 櫂人　三木 拓斗

指導教員：岩井　悠

これまでに知られている種々の関数は無限級数によって表示することが可能である。18 世紀の数学者 Euler は, 多くの関数に対して, 微積分の知識を使わずに, その無限級数を求めていた。今回, そうやって無限級数で表された関数は, 元の関数の性質をみたすのかということを調べた。

正確には, まず, 多くの関数を無限級数によって定義しなおした。無限級数によって関数を定義することで, 数値計算などの代入操作は理解しやすくなるが, 元の関数の性質が不明瞭になってしまう。

このような背景から, 無限級数で表された関数が, 元の関数の性質をみたすのかという自然な疑問が生じ, 今回の研究テーマとした。

Euler が関数を級数表示するときに用いたのは **Newton の一般二項定理** である。

s は任意の実数として

$$(1+x)^s = 1 + \frac{s}{1!}x + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}x^k \qquad (|x|<1)$$

この Newton の一般二項定理を用いると, 次のように級数展開する。

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots \qquad (|x|<1)$$

まず, 関数の値が元の関数と級数で表示された関数とで一致するのかということを調べた。例えば, $\sqrt{1+x}$ の級数に $x = 0.96$ を代入すると

$$\sqrt{1.96} = 1 + 0.48 - 0.1152 + 0.055296 - \cdots$$

となる。この右辺を第 n 項まで計算した値をグラフにしたものが右の図 1 である (縦軸が値, 横軸が項数 n, 中央の線が真の値 1.4)。

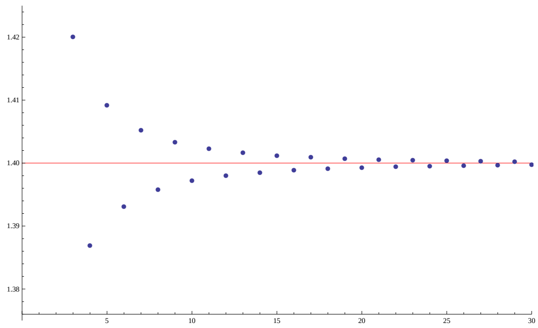

図 1　$\sqrt{1+0.96}$ の収束の様子

また, $\sqrt{1+x}$ の級数を 2 乗すると, $1+x$ になるのかということを調べた。

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} \times \sqrt{1+x} &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right)x^3 + \cdots \\ &= 1 + x\end{aligned}$$

こうやって, $\sqrt{1+x} \times \sqrt{1+x} = 1 + x$ が成り立つことがわかった。

級数であっても, 元の関数の性質を保つようになっていた。これにより, 級数表示を関数の定義として採用しても矛盾なく議論できることがわかった。

今後はこれらの知識を用いて, Basel 問題の解法についてさらなる見識を深めたい。

- Basel 問題とは「$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ の値がいくつになるか」という問題。

1735 年, Euler によってその値が $\frac{\pi^2}{6}$ であることが示された。