

『確率の関数化に迫る ～高校数学の深層～』

岡本 琉生, 長谷川 誓哉, 本庄 良旭, 山本 雅士

指導教員 原田 昌昭

1. 研究の背景

高校数学のあらゆる分野の問題を見直し, 「4次式の因数分解の一般的な解法」に始まり, 「中線定理の4通りの証明」, 「四面体の体積の4通りの解法」, 「カプレカ数の証明」などの研究を行ってきた。その中で, コンピュータを用いて視覚的に問題を理解・解決するという手法を思いつき, 「2次方程式の解の存在範囲」について, 放物線の頂点の軌跡から複数の問題を包括的に処理することに成功した。次に「さいころの1の目が出る回数と投げる回数の関係」についてコンピュータを用いて研究を進めることとなった。

2. 目的

「サイコロを何回投げたときに1の目が3回出る確率が最大になるか」という問題から取り組んだ。1の目が出る確率は $1/6$ のため, 単純には $3 \times 6 = 18$ 回と予想される。

一般に1の目が m 回出る確率が最大となる回数について考え, さらに「1の目」を「奇数の目」や「3の倍数の目」に置き換えた問題まで発展させて研究していく。

3. 方法

① x 回投げて1の目が3回出る確率を $P(x)$ とすると $P(x) = {}_x C_3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-3} \cdots$ (A) である。この式を x の関数と捉えて, 関数グラフソフト【GRAPES】を用いてグラフをかき, 最大となる回数を推測する。

② 表計算ソフト【EXCEL】を用いて, 具体的に確率を求める。(小数第7位まで)

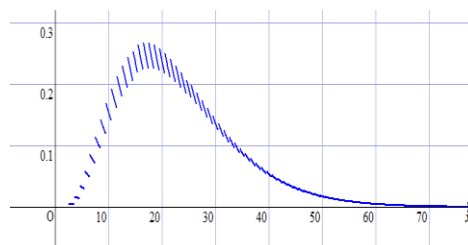
③ 方程式 $P(x)=P(x+1)$ や不等式 $P(x)<P(x+1)$ などを解いて, ①②の根拠を示す。

4. 結果

(A)式のグラフをかくと, $x=15$ から $x=20$ の間で最大になると予想された。(下図)

次に表計算ソフトを用いて, 具体的に確率を求めてみると $P(17)=P(18)=0.2451984$ となって小数第7位までは等しくなり, 確率が最大となった。

(A)式を用いて, 方程式 $P(x)=P(x+1)$ を解くと $x=17$ となり, 確かに $P(17)=P(18)$ であることが証明された。最初から③の不等式を解くのが一般的な解法であるが, ①②を通して確率の変化する様子がよくわかり, 問題を解くだけでなく, 問題の深層に迫ることが



できた。続いて, 「奇数の目」や「3の倍数の目」について m 回出る確率が最大となる回数を研究した。すると, $P(2m-1)=P(2m)$ や $P(3m-1)=P(3m)$ のように同様の結果を得た。

5. 考察

今回は「1の目」, 「奇数の目」, 「3の倍数の目」について確率が最大となるときに2つ存在することを発見した。そのことは $P(x)$ と $P(x+1)$ の2式を比較することで説明できそうである。

6. 今後の展望

最大となる回数が2つあるという結果は今回調査した問題だけの単なる偶然なのか, どのような場合に成り立つことなのか, その根拠についても考えていきたい。また, 最大となる回数が1つだけのときは, それがどのようなときなのかも考察していきたい。

7. 参考文献

改訂版 4STEP 数学 I+A 【数研出版】 情報の科学 新訂版 【実教出版】 など

8. キーワード

サイコロの確率, 反復試行の確率, 確率とコンピュータ, グラフ化