『　２次方程式の解の存在範囲　～高校数学の深層～　』

岡本琉生，長谷川誓哉，本庄良旭，山本雅士
指導教員　原田　昌昭

１　研究の目的（ねらい）や意義（背景）

これまで学習してきた高校数学を振り返り、疑問に思った箇所を追求したり、類題を作ってその解法を研究したり、ある問題について複数の解法を比較したりと、教科書に載っている様々なことについて、多角的に、包括的に、かつ深く研究してきた。高校数学から上積みをしていくというより、掘り下げていくというイメージを持ちながら、研究を行ってきた。高校数学を学習した人なら誰にでも理解できる、しかし誰も思いつかないであろう方法を研究する中で、「２次方程式の解の存在範囲」という題材に辿り着き、その奥深さを実感する中で、今回のテーマとして取り上げることとなった。

２　進捗状況

このテーマの一般的な解法は、数学Ⅰ「２次関数のグラフ」を用いてグラフの満たす条件を挙げていく方法、または数学Ⅱ「解と係数の関係」を用いて直接的な計算によって答えを導く方法が挙げられる。しかし、数学Ⅱ「軌跡」を学習した後、放物線の頂点の軌跡を利用し、グラフを動かせることでこの問題にアプローチできないかと考えた。具体的には以下の問題を取り上げた。

> 2 次方程式 $x^2-2mx+m+6=0$ が［問 1]～[問 3］の異なる 2 つの解をもつように，定数 m の値の範囲を求めよ。
>
> ［問 1］　2 つとも負　　［問 2］　2 つとも 1 より大きい　　［問 3］　異符号

頂点の軌跡は、$y=-x^2+x+6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$　となる。グラフが動く様子をいくつかの瞬間を抜き出して説明することもできたが、関数グラフソフト【GRAPES】を利用して連続的に動かせることにした。すると、[問 1]と[問 3]の境目が明確になり、問題の関連性まで理解を深めることができた。（他の方法では、[問 1]～[問 3］が独立した問題として解かれる。）

３　今後の展望

「軌跡」から考える方法では新たな疑問が現れた。[問 3](異符号) において、m が正のとき、なぜ異符号の解をもたないのか。グラフを動かせるうちに定点を通っていることに気付き，定点 $\left(\frac{1}{2},\frac{25}{4}\right)$を導き出すことからこの疑問を解決することができた。また、そのような定点問題から派生し、グラフの通過領域を考えることが今後の研究課題のひとつとなった。現在、数学Ⅱ「微分」を学習しているところなので、３次方程式についてもグラフを利用して解の存在範囲を調べていきたい。また、これまでに図形の問題において３～４通りの解法を考えたり、整数問題（カプレカ数や剰余類など）にも取り組んでいるので、並行してそちらの研究も行っていきたい。