$\sin x$ の無限積表示から得られる三角函数の種々の公式について

課題研究 第 6 班 (数学) 「オイラーに学ぶ」
土井 遥希　中野 朱莉　中村 恭爽　舩本 燿人　三木 拓斗

指導教員：岩井　悠

概要

18 世紀のスイスの数学者 Euler は, 初期の業績である Basel 問題 $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$ の解法をはじめとして, 無限級数と無限積を合わせて多くの関数等式を導出し, その結果は後の数学史にも大きな影響を与えるものであった. 本研究では, Euler の方法を用いた $\sin x$ の無限積表示に注目し, その過程で得られる様々な関数等式について考察した.

$\sin$ の無限乗積

$n=2m+1$ のとき, x^n-1 の因数分解:

$$x^n-1=(x-1)\prod_{k=1}^{m}(x^2-2p_kx+1)\quad\left(p_k=\cos\frac{2\pi k}{n}\right)$$

において, 変数変換

$$x\to\frac{a}{b},\quad(a,\ b)\to(1+t,\ 1-t)$$

としたあとの

$$(1+t)^n-(1-t)^n=2nt\prod_{k=1}^{m}\left(1+t^2\cot^2\frac{\pi k}{n}\right)$$

において, $t=x/n$ とすると

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=2x\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\cot^2\frac{\pi k}{n}\right).$$

ここで, $n\to\infty$ の極限を考えると

$$\sinh x=x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right)$$

が得られる. $x\to ix,\ x\to\pi x$ などと変数変換することで, 以下の等式が成り立つ:

$$\sinh x=x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right),\quad\sin x=x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right),\quad\sinh\pi x=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right),\quad\sin\pi x=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

研究内容

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right),\qquad(1+t)^n-(1-t)^n=2nt\prod_{k=1}^{m}\left(1+t^2\cot^2\frac{\pi k}{n}\right)$$

などの等式から得られる, 種々の関係式を導いた.

参考文献

[1] E. Artin: *The Gamma Function*, New York, Holt, Rinehart and Winston, (1964)
[2] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信: 整数論の風景 ベルヌーイ数とゼータ関数 新装版, 共立出版, (2022)
[3] 野海正敏: オイラーに学ぶ『無限解析序説』への誘い, 日本評論社, (2007)