今週の数学の学習ポイント　２０２０年４月第４週目

37 回生のみなさん。お元気ですか。数学の自宅学習の上で、ポイントをお伝えしたいと思います。

先週、「37 回生のみなさんへ $\boxed{\text{数　学}}$ について」というタイトルの学習目安のお知らせをお配りしました。
『数学Ｉ』は１週間に３時間程度、『数学Ａ』は１週間に２時間程度の学習を始めていると思います。
その調子で、今週も取り組んでいきましょう。

復習を兼ねて、先週に取り組んだ内容にも触れながら、ポイントを整理します。

『数学Ｉ』　第１回（教科書 p.６～９　３TRIAL 問題番号 １～９）

① 高校からの内容「特定の文字に着目する」について

この「特定」とは、最初は問題に「x に着目して」とか「a に着目して」などと指示されますが、
今後、２種類以上の文字が入った式を扱うとき、

- 自分で着目する文字を決めて考える。
- 問題に「着目して」とは書かずに，それとなく指示されている。

の２つの状況に出会います。そのときのための、練習だと思って、しっかりと理解してください。

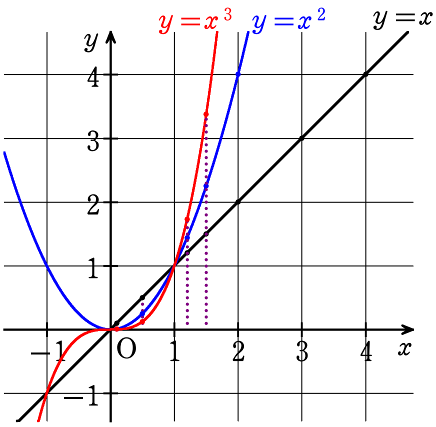
ポイント 着目した文字以外は、すべて「 数 」とみなして扱う。

です。着目していない文字を「数」と見なして、式が扱えるようになりましょう。
特に、教科書 p.8 例 5 の整理の仕方 (係数や定数項を（　　）を付けて まとめる) は、完璧に習得しましょう。

② 降べきの順（こうべきのじゅん）について

「べき」とは、「累乗」のことです。昔使っていた言葉です。現在では、ほとんど使われなくなった単語ですね。数学の中のこの「降べき」「昇べき」の時くらいしか使わなくなった、ある意味、絶滅寸前の単語といえるでしょう。また、「昇べきの順」も、絶滅寸前です。次数は、高い方から低い方に並べ替えることが、ほとんどですからね。なぜなら、次数が高い項が低い項より、「強い」ですからね。この「強さ」とは、例えば

x に入れる数	0	0.1	0.5	1	1.2	1.5	2	3	4	5	…
x	0	0.1	0.5	1	1.2	1.5	2	3	4	5	…
x^2	0	0.01	0.25	1	1.44	2.25	4	9	16	25	…
x^3	0	0.001	0.125	1	1.728	3.375	8	27	64	125	…



注意 高校からは、座標軸の正の方向には、右の図のように「矢印」をつけていきます。みなさんも、今後、必ず付けるようにしてください。

という風に、x と x^2 と x^3 を比較してみると

0 より大きく 1 より小さな値を x に代入したら、小さくなるスピードは、x^3 が一番速く、x が一番遅い。

1 より大きな値を x に代入したら、大きくなるスピードは、x^3 が一番速く、x が一番遅い。

次数が高い方が「強い」というのは、こういうことです。ですので、「昇べき」は、たまにしか使う機会がありません。

『数学Ⅰ』　第２回（教科書 p.10～12　3 TRIAL 問題番号 10～14）

①　「指数法則」について

1　$a^m \times a^n = a^{m+n}$

2　$(a^m)^n = a^{m \times n}$

3　$(ab)^n = a^n b^n$

例　$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

例　$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12} = 4096$

例　$(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

例　$(2x^2)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3 = 8x^6$

上記、指数法則１～３は、必ず習得しておかなければならない法則になります。

もし、3TRIAL 完成ノートの p.9 問題番号 10 で９問のうち、１問でも間違えた場合は、なぜ間違えたのかをしっかり考え、教科書 p.10 の 10 行目から12 行目をもう一度読み直しておきましょう。

②　「展開の公式」について

1　$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$　　$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2　$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3　$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

4　$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

すべて重要です。きっちり使えるまで、完成ノートを徹底的に取り組みましょう。

そうすれば、展開の逆の操作である、因数分解がきちんとできるようになるでしょう。

『数学Ⅰ』　第３回（教科書 p.13，14　3 TRIAL 問題番号 15～18）

「式の展開の工夫」について

展開に関して言えば、工夫をしなくても、一つ一つ分配法則を用いて丁寧に計算していけば、必ず正解までたどり着けます。しかし、この 式の一部を１つのまとまりとみる工夫 や 足し算や掛け算の組み合わせの工夫 は、今後学ぶ、因数分解において力を発揮する工夫になりますので、しっかりと習得していきましょう。

教科書 p.14 例題１　公式　$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

は、とてもきれいな形をしているので、(3 項の和)^2 の公式 として、覚えてしまいましょう。

例　$(2x+3y+4z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2\cdot2x\cdot3y + 2\cdot3y\cdot4z + 2\cdot4z\cdot2x$
$= 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24yz + 16zx$

『数学Ⅰ』　第４回（教科書 なし　3 TRIAL 問題番号 19～24）

今までの総復習になります。完成ノートにしっかりと途中の式変形を、必ず「＝（イコール）」を用いて、自分で計算間違いを発見するため、また、他者に自分の考察を見てもらうために、丁寧に書いていきましょう。

（きれいな字でなくても良いのです。ていねいに書いてくれると、私はとてもうれしいです。）

『数学Ⅰ』　第５回（教科書 p.15，16　3 TRIAL 問題番号 25～28）

「因数分解」について

因数分解は、整式を１次以上の整式の積の形に表すことです。積の形に表す（因数分解する）ことが出来るようになると、式の複雑さが減り、難しく見える式が簡単に見えるようになります。ですので、因数分解する力は、身につけておけばおくほど、あなたの助けになります。最初は、１つの因数分解の問題も、時間がかかって、素早く出来ないかも知れませんが、時間がたっぷりとあるのですから、じっくりと取り組んでいけば良いのです。ここでかけた時間に比例して、今後の式の変形のスピードと正確さがUPしますので。

『数学Ⅰ』　第６回（教科書 p.17，18　3 TRIAL 問題番号 29～31）

「因数分解の公式４ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$」（通称：たすきがけ）

まず、余談から。「たすきがけ」とは、多くの日本人が和服を着ていた昭和中期までの頃、袖が家事などで汚れるのを防ぐために、「たすき」を横８の字（∞の形）にして、両袖をまくし上げ「かけ」ていたことを表した言葉である。教科書 p.17 の中程にある図のバッテンの形が、和服をたすきがけしたときの背中に現れる「バッテン（×）」とその当時の日本人には見えたことから、この因数分解の公式４をたすきがけの因数分解と呼ばれることになった。現代において、たすきがけを見ることは、ほとんどなくなってしまった。

$$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \rightarrow & bc \\ c & & d & \rightarrow & ad \end{array}$$

さて、本題である。この「たすきがけ」の因数分解（つまり、x^2 の係数が１以外のときの因数分解）では、この「たすきがけ」の図を用いて、因数分解を行うのだが、１回ではなかなか正解となる数の組み合わせが発見できない。ここも、時間がたっぷりあることをいいことに、じっくり腰を据えて、取り組んでもらいたい。正解の組み合わせが見つかるまで、粘り強くがんばるのです。

『数学Ⅰ』　第７回（教科書 p.19，20　3 TRIAL 問題番号 32～35）

工夫の必要な因数分解である。

- 置き換えを使って、因数分解の公式が使える形に変形する。
- ２種類以上の文字を含んでいる場合は、

  [文字によって次数に違いがある場合]　次数の最も低い文字に着目して降べきの順に整理する。

  [どの文字に着目しても同じ次数の場合]　どちらかの文字に着目すると決めて、降べきの順に整理する。

  注 もちろん、着目しなかった方の文字は、「数」扱いです。

完成ノート p.32 ～ 35 の 問題番号 31 ～ 34 は、最初は難しく感じるかも知れません。途中で行き詰まったら、解答をみて、再度取り組みましょう。２度、３度と同じ問題でも取り組んでみましょう。反復学習が特に必要な問題になります。

『数学Ⅰ』　第８回（教科書 p.21，22　3 TRIAL 問題番号 36～39）

①「３次式の展開と因数分解」について

３次式の展開の公式Ⅰ

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ …(ⅰ)

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ …(ⅱ)

(ⅱ)は(ⅰ)の式の b の代わりに $-b$ を代入すれば導けます。
ですので、まずは(ⅰ)をしっかり覚えてしまいましょう。

(ⅰ)⇔ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
⇔ $\{a+(-b)\}^3=a^3+3a(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$
⇔ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
⇔ (ⅱ)

３次式の展開の公式Ⅱ

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ …(ⅲ)

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ …(ⅳ)

(ⅳ)も(ⅲ)の式の b の代わりに $-b$ を代入すれば導けます。
ですので、まずは(ⅲ)をしっかり覚えてしまいましょう。

完成ノート p.37 の問題番号 36 で練習してください。

また、p.38 の問題番号 37 は、３次式の因数分解です。

これは、上の展開の公式(ⅲ)，(ⅳ)の右辺から左辺の変形になります。

② 完成ノート p.39 について

例題６　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$ の因数分解

この式は、-24 の項が付いているので、積の形だけで表されていないので因数分解できていない。

では、どうするか。

今まで学んできた因数分解の手順では、因数分解できそうにありません。

ですので、仕方なく $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ の部分を展開せねばなりません。

しかし、すべてを展開するのも大変ですので、できるだけ展開する項を最小限にとどめることを考えます。

このとき、工夫を施します。展開したときに同じ項が多くなるように掛ける順番を変えます。

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$

こうすれば、前の２項の展開は　x^2+5x+4

後の２項の展開は　x^2+5x+6

となり、x^2+5x という同じ項が現れます。

この「x^2+5x」をひとかたまりと見て（置き換えを利用したり）、さらに何か出来ないか考えます。

ここでは、まだ因数分解が出来そうにないので、さらに展開することにします。

③　完成ノート p.40 について

いままでの経験をフル活用して取り組む問題です。じっくり粘って因数分解してください。

これで、この第１節「数と式」は終了です。

『数学Ａ』　第１回（教科書 p.５～７　３TRIAL 問題番号 １～５）

①　集合で扱われる新たな記号

$\in$　$\notin$　$\{\ \}$　$\subset$　$\supset$　$\varnothing$　$\cup$　$\cap$

中学で学んだ不等号は、読み方があるが、集合で用いられるこれらの記号のうち、

$\in$　$\notin$　$\subset$　$\supset$　$\varnothing$

には、特に読み方はない。

$1\in A$ なら、「要素１は集合 A に属する」と読む程度である。

$2\notin A$ なら、「要素２は集合 A に属さない」

$A\subset B$ なら、「集合 A は集合 B に含まれる」

$\varnothing$ は、「空集合」。ギリシャ文字 ϕ (ファイ) に似ているので、「ファイ」と読む方がいる。

でも、厳密には、「ファイ」とは別の記号であるので、「空集合」と読んでいるのである。

参考　数学Ⅰの教科書の p.3 に、ギリシャ文字の表が載っています。A、B、C などの「ローマ字」に比べ、馴染みが薄い。数学では特定の文字（α：アルファ、β：ベータ、γ：ガンマ、θ：シータ、π：パイ）はよく出てくる。p.3 を眺めておこう。

参考
- $<$　小なり
- $>$　大なり
- $\leqq$　小なりイコール
- $\geqq$　大なりイコール

②　集合の表し方について

集合の要素には、{　}（通称：中カッコ）を使う。そして、{　}の中の書き方には、２通りの方法がある。

「要素を書き並べる方法」と「要素の満たす条件を書く方法」である。

このうち、「要素の満たす条件を書く方法」は、いろいろな書き方があるので、しっかり慣れておこう。

③　空集合記号 $\varnothing$ は、{　}（通称：中カッコ）の中には書かない。{　} の中には、要素を書くので。

$\varnothing$ は「集合」であって、「要素」ではないのです。

ですから、教科書 p.7 例５の答えは、 $\varnothing$, {a}, {b}, {a，b}　となっているのです。

『数学Ａ』　第２回（教科書 p.8 ～10　３TRIAL 問題番号 6 ～10）

①　記号　$\cap$　$\cup$　の読み方

例えば、A と B の共通部分を表す「$A\cap B$ 」なら「A かつ B」

A と B の和集合を表す「$A\cup B$ 」なら「A または B」と読む。

②　用語「少なくとも一方」について

「A と B の少なくとも一方に属する」とは、

「A だけに属していて B には属していない」

「B だけに属していて A には属していない」

「A と B の共通部分に属している（A と B の両方に属している）」　のいずれかを表している。

③　補集合を表す記号「￣」は、単純に「バー」と読んでよい。

$\overline{A}$　「A バー」とか「A の補集合」と読む。

$\overline{\overline{A}}$　「A バーのバー」とか「A の補集合の補集合」と読む。ちなみに、$\overline{\overline{A}}=A$ であるけれどね。

$\overline{A\cap B}$　「A かつ B のバー」とか「A かつ B の補集合」と読む。

$\overline{A}\cap\overline{B}$　「A バーかつ B バー」とか「A の補集合かつ B の補集合」と読む。

④　ド・モルガンの法則について

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$　…(ⅰ)

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$　…(ⅱ)

（ⅰ）の式がなぜ成り立つのかは、教科書 p.10 の７行目に描かれている図（集合を図にしたものは「**ベン図**」と呼ばれている）を４行目から６行目の説明文とともに、納得できるまで考えてみよう。

練習９にあるように、(ⅱ)の式が成り立つことも、ベン図を用いて説明してみよう。

『数学Ａ』　第３回（教科書 p.12 ～14　3 TRIAL 問題番号 11 ～16）

①　集合の要素の個数を数える

「集合の書き方」と「集合の要素の個数を表す書き方」をきちんと区別して書けるようになろう。

例　集合 A が 2 以上 10 以下の整数の集合を表す場合

集合 A は $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ とか

$A=\{x \mid x$ は2 以上 10 以下の偶数$\}$ とか

$A=(2n \mid n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ などと表すことができる。

この集合 A の要素の個数は，５個なので，$n(A)=5$ と表される。

この $n(\quad)$ の n は「個数」を表す英単語 number の頭文字を用いている。

②　和集合の要素の個数の公式

$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

「A または B の要素の個数 ＝ A の要素の個数＋ B の要素の個数－ A かつ B の要素の個数」

教科書 p.13 の説明をしっかり納得できるまで、読み込みましょう。

③　倍数の個数

教科書 p.14 例題 1 の解答について

７行目　100 以下の自然数のうち３の倍数の個数を $3 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ 3 \cdot 3,\ \cdots\cdots,\ 3 \cdot 33$ だから 33 個としている。

これを、$100 \div 3 = 33.3\cdots$ より，33 個 としても、もちろん良いです。

3TRIAL 完成ノート p13 例題 1 のようなときは、

100 から 500 までの自然数のうち 6 の倍数の個数は、

$500 \div 6 = 83.3\cdots$　$99 \div 6 = 16.5$ より，$83-16=67$ 個とすればよいでしょう。

↑ 100 より 1 小さい数 99 を使いましょう。「100 から」なので 100 にしがちですが。

『数学Ａ』　第４回（教科書 p.15　3 TRIAL 問題番号 17 ～19）

文章題は、ベン図や表をきちんと書いて、理解の助けになるようにしましょう。

『数学Ａ』　第５回（教科書 p.16 ～19　3 TRIAL 問題番号 20 ～24）

場合の数　は　樹形図 や表や規則性を用いて、「漏れなく」「重複なく」数えていきます。

特に、「和の法則」と「積の法則」は、重要です。両者の用いる場面の違いをしっかり理解しよう。

「和の法則」は、「２つの事柄が同時には起こらないとき」に用いる。

「積の法則」は、「２つの事柄が同時に起こるとき」や

「１つの事柄の起こり方に、引き続きもう１つの事柄が起こるとき」に用います。