1

次の単項式の係数と次数をいえ。また，[　]内の文字に着目したとき，その係数と次数をいえ。

(1) $3ax^2$ [x]　　(2) by [y]
(3) $-2ay$ [a]　　(4) $-xy^3$ [y]
(5) $3ax^2y$ [x と y]　　(6) $-5abx^2y^3$ [a と b]

(1) 係数 3，次数 3　　x に着目すると　係数 $3a$，次数 2
(2) 係数 1，次数 2　　y に着目すると　係数 b，次数 1
(3) 係数 -2，次数 2　　a に着目すると　係数 $-2y$，次数 1
(4) 係数 -1，次数 4　　y に着目すると　係数 $-x$，次数 3
(5) 係数 3，次数 4　　x と y に着目すると　係数 $3a$，次数 3
(6) 係数 -5，次数 7　　a と b に着目すると　係数 $-5x^2y^3$，次数 2

2

次の整式の同類項をまとめよ。また，その整式の次数をいえ。

(1) $8x-1+5x-10x+4$　　(2) $3x^2+x-1+2x-x^2+7$
(3) $2x^3-x+6x^2+4x^3-3x^2-5+3x$　　(4) $5x^2-3+3x+2-5x^2-6x$
(5) $2-5x^2+x^4+3x^2-2x^4+1$　　(6) $a^2-4ab+4b^2+6ab-3b^2+a^2$

(1) (与式)$=(8+5-10)x+(-1+4)=3x+3$
最も次数の高い項は　$3x$
よって，この整式の次数は　1

(2) (与式)$=(3-1)x^2+(1+2)x+(-1+7)$
$=2x^2+3x+6$
最も次数の高い項は　$2x^2$
よって，この整式の次数は　2

(3) (与式)$=(2+4)x^3+(6-3)x^2+(-1+3)x-5$
$=6x^3+3x^2+2x-5$
最も次数の高い項は　$6x^3$
よって，この整式の次数は　3

(4) (与式)$=(5-5)x^2+(3-6)x+(-3+2)$
$=-3x-1$
最も次数の高い項は　$-3x$
よって，この整式の次数は　1

(5) (与式)$=(1-2)x^4+(-5+3)x^2+(2+1)=-x^4-2x^2+3$
最も次数の高い項は　$-x^4$
よって，この整式の次数は　4

(6) (与式)$=(1+1)a^2+(-4+6)ab+(4-3)b^2=2a^2+2ab+b^2$
どの項も 2 次である。
よって，この整式の次数は　2

解説　左の解答で使われている「与式」とは，「問題に与えられた式」を表しています。問題に書かれた式を書き写すのを省略したい時に，「与式」を使います。完成ノートでは，問題の下に余白がありますので，その下に「＝」をつけてから式変形すればよいので，「与式」を書くことはあまりないかもしれません。問題用紙と解答用紙が別の用紙になっているときに，「与式」を使うことが多いです。私も授業の板書では，「与式」をよく使います。皆さんもこの「与式」を実際に使って式変形をしてみてください。式を写す手間を省いてみましょう。
ちなみに，「与式」に「(　　)」がついていますね。これは，式に日本語を使うときに，つけることが多いです。私が高校生の頃は，必ずつけていましたが，ここ最近はこのカッコをつけずに「与式＝…」と書いている本もあります。ですので，どちらでも構わないということです。私もカッコなしの「与式」を３年前から使い始めました。

3

次の整式は，[　]内の文字に着目すると何次式か。また，そのときの定数項は何か。

(1)　ax^3+bx^2+cx+d　$[\,x\,]$　　(2)　$a^2+3ab-b$　$[\,a\,]$

(3)　$2x^2-3xy+y^2-y$　$[\,y\,]$　　(4)　$ax^2+3bxy+cy^2+2$　$[\,x\,]$

(1)　x に着目すると　3 次式，定数項 d

(2)　a に着目すると　2 次式，定数項 $-b$

(3)　y に着目すると　2 次式，定数項 $2x^2$

(4)　x に着目すると　2 次式，定数項 cy^2+2

解説　２種類以上の文字があるとき，着目した文字以外の文字は「数」として扱います。また，「定数項」とは，着目した文字を含まない項です。ですので，(4)を例にすると，x に着目するのですから，x の２次式とみることができ，x^2 の係数は「a」, x の係数は「$3by$」, そして定数項は「cy^2+2」となるのです。

4

次の整式を，x について降べきの順に整理せよ。

(1)　$5x-4x^2-2+5x^3$　　(2)　$4x^2-5+2x^3-2x-x^2-x^3+3$

(3)　$2a^2x+a^2x^2-3x^2-5x+1$　　(4)　$6x^2-7xy+2y^2-6x+5y-12$

(1)　(与式)$=5x^3-4x^2+5x-2$

(2)　(与式)$=(2-1)x^3+(4-1)x^2-2x+(-5+3)=x^3+3x^2-2x-2$

(3)　(与式)$=(a^2-3)x^2+(2a^2-5)x+1$

(4)　(与式)$=6x^2-(7y+6)x+(2y^2+5y-12)$

解説　皆さんは，式の変形に「＝」をつけていますか？等式の変形であることを示しているこのイコールを変形のたびに書いていきましょう。

5

次の整式 A と B について，$A+B$ と $A-B$ を計算せよ。

(1)　$A=3x-4y-2z$，$B=-x-4y+2z$

(2)　$A=x^3-3-2x$，$B=-5x+2x^2-3x^3-1$

(3)　$A=2a^2-ab+5b^2$，$B=-3a^2+5ab-b^2$

(4)　$A=2x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$，$B=2x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

(1)　$A+B=(3x-4y-2z)+(-x-4y+2z)=(3-1)x+(-4-4)y+(-2+2)z=2x-8y$

$A-B=(3x-4y-2z)-(-x-4y+2z)=3x-4y-2z+x+4y-2z=(3+1)x+(-4+4)y+(-2-2)z=4x-4z$

(2)　$A+B=(x^3-3-2x)+(-5x+2x^2-3x^3-1)=(1-3)x^3+2x^2+(-2-5)x+(-3-1)$

$=-2x^3+2x^2-7x-4$

$A-B=(x^3-3-2x)-(-5x+2x^2-3x^3-1)=x^3-3-2x+5x-2x^2+3x^3+1$

$=(1+3)x^3-2x^2+(-2+5)x+(-3+1)=4x^3-2x^2+3x-2$

(3)　$A+B=(2a^2-ab+5b^2)+(-3a^2+5ab-b^2)=(2-3)a^2+(-1+5)ab+(5-1)b^2=-a^2+4ab+4b^2$

$A-B=(2a^2-ab+5b^2)-(-3a^2+5ab-b^2)$

$=2a^2-ab+5b^2+3a^2-5ab+b^2$

$=(2+3)a^2+(-1-5)ab+(5+1)b^2$

$=5a^2-6ab+6b^2$

(4)　$A+B=(2x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)+(2x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3)$

$=(2+2)x^3+(6-6)x^2y+(12+12)xy^2+(8-8)y^3$

$=4x^3+24xy^2$

$A-B=(2x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)-(2x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3)$

$=2x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3-2x^3+6x^2y-12xy^2+8y^3$

$=(2-2)x^3+(6+6)x^2y+(12-12)xy^2+(8+8)y^3=12x^2y+16y^3$

解説　等式変形の書く方向について

(1)のように，右に右に変形の式を書いていく　OK

(2)のように，途中まで変形の式を右に書いていき，途中から改行して続きを書いていく　OK

(3)の $A-B$ ように，下に下に変形を書いていく OK

(4)の $A-B$ のように，途中まで下に変形し，途中から右に変形の式を書く　OK

つまり，変形していく方向は，右でも下でも構わないということである。私がおススメするのは，下に下に変形していくことです。計算のミスが確実に減るからです。

6

$A=2x^2-3x+1$，$B=x^2+2x-4$ とする。次の式を計算せよ。

(1)　$A+3B$　　(2)　$2A-B$　　(3)　$3A-2B$

(1)　$A+3B=(2x^2-3x+1)+3(x^2+2x-4)$

$=2x^2-3x+1+3x^2+6x-12$

$=5x^2+3x-11$

(2)　$2A-B=2(2x^2-3x+1)-(x^2+2x-4)$

$=4x^2-6x+2-x^2-2x+4$

$=3x^2-8x+6$

(3)　$3A-2B=3(2x^2-3x+1)-2(x^2+2x-4)$

$=6x^2-9x+3-2x^2-4x+8$

$=4x^2-13x+11$

解説　代入するとき(　　)を使いましょう。例えば，(1)で

$A+3B=2x^2-3x+1+3(x^2+2x-4)$

と代入しても，間違いではありません。しかし，式のかたまり代入するときは，できるだけ(　　)を用いて，式のかたまりを保護してあげてください。この癖をつけることで，計算間違いを減らすことができます。

もちろん，$A+3B=2x^2-3x+1+3x^2+2x-4$

と一つも(　　)を付けず，代入したら間違いですね。

7

次の整式を，x について降べきの順に整理せよ。また，昇べきの順に整理せよ。

(1)　$5x^2-3x^3-6x^2+2x+7-7x$　　(2)　$-3xy-7x-2xy+y+9x^2-4$

(1)　降べきの順に整理すると

(与式)$=-3x^3+(5-6)x^2+(2-7)x+7=-3x^3-x^2-5x+7$

昇べきの順に整理すると

(与式)$=7-5x-x^2-3x^3$

(2)　降べきの順に整理すると

(与式)$=9x^2+(-3y-2y-7)x+(y-4)=9x^2-(5y+7)x+(y-4)$

昇べきの順に整理すると

(与式)$=(y-4)-(5y+7)x+9x^2$

解説　(2)の解答について

x の項を $-(5y+7)x$ としています。

これを $+(-5y-7)x$ としてももちろん正解です。

どちらが良い解答ということはありません。このあと学ぶ2種類以上の文字が含まれる因数分解でこの2通りの係数のまとめ方両方が出てきます。

問題番号34(3)，(4)の解答を参照してください。

8

次の式を計算せよ。

(1)　$4(x^3+3x-2)-2(4x-5-3x^2)+(4+3x-5x^2)$　　(2)　$2(2a^3-5a+10)+3(a-4-a^2)-(3a^2-4a+7)$

(1)　(与式)$=4x^3+12x-8-8x+10+6x^2+4+3x-5x^2$

$=4x^3+(6-5)x^2+(12-8+3)x+(-8+10+4)$

$=4x^3+x^2+7x+6$

(2)　(与式)$=4a^3-10a+20+3a-12-3a^2-3a^2+4a-7$

$=4a^3+(-3-3)a^2+(-10+3+4)a+(20-12-7)$

$=4a^3-6a^2-3a+1$

9

$A=2x+y+3z$，$B=x+2y+z$，$C=x+y+2z$ とする。次の式を計算せよ。

(1) $2A-(B+2C)$ (2) $A+C-\{2A-(B+C)\}$

(1) (与式)$=2A-B-2C$

$=2(2x+y+3z)-(x+2y+z)-2(x+y+2z)$

$=4x+2y+6z-x-2y-z-2x-2y-4z$

$=x-2y+z$

(2) (与式)$=A+C-(2A-B-C)$

$=A+C-2A+B+C$

$=-A+B+2C$

$=-(2x+y+3z)+(x+2y+z)+2(x+y+2z)$

$=-2x-y-3z+x+2y+z+2x+2y+4z$

$=x+3y+2z$

解説 すぐに代入したくなりますが，ここはグッと我慢です。このまま代入すると，計算間違いを起こしやすくなります。ですので，まずは与えられた A，B，C の式を変形して，代入しやすくしてください。そうすれば，計算間違いしにくくなっていると思います。だからと言って必ずしも正解が出せるとは限りませんけれどね。

10

次の式を計算せよ。

(1) $a^4\times a^2$ (2) $3x^2\times(-4x^3)$ (3) $3x^2y\times 5xy^3$

(4) $(a^2)^4$ (5) $(-x^3)^2$ (6) $(-4a^2b^2)^3$

(7) $-x^4y^2\times(-x)^3y$ (8) $2ab^2\times(-3a^2b)^3$ (9) $(abc)^2\times(-3ab^3c)$

(1) (与式)$=a^{4+2}=a^6$

(2) (与式)$=3\times(-4)\times x^{2+3}=-12x^5$

(3) (与式)$=3\times 5\times x^{2+1}\times y^{1+3}=15x^3y^4$

(4) (与式)$=a^{2\times 4}=a^8$

(5) (与式)$=(-1)^2\times(x^3)^2=x^{3\times 2}=x^6$

(6) (与式)$=(-4)^3\times(a^2)^3\times(b^2)^3=-64a^6b^6$

(7) (与式)$=-x^4y^2\times(-1)^3x^3y=\{-1\times(-1)\}\times x^{4+3}\times y^{2+1}=x^7y^3$

(8) (与式)$=2ab^2\times(-3)^3a^6b^3=\{2\times(-27)\}\times a^{1+6}\times b^{2+3}=-54a^7b^5$

(9) (与式)$=a^2b^2c^2\times(-3)ab^3c=(-3)\times a^{2+1}\times b^{2+3}\times c^{2+1}=-3a^3b^5c^3$

解説 指数法則を確実にしましょう。この9問を間違えずしっかり納得できるまで，じっくりと指数法則を身につけましょう。

11

次の式を展開せよ。

(1) $x^2(3x^2-4x+2)$ (2) $(a^2+5a-3)\times(-2a)$

(3) $(-2x)\times(2x^2-3xy-y^2)$ (4) $\left(\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{ab}{6}-\dfrac{b^2}{4}\right)\times 12b^2$

(1) (与式)$=x^2\times 3x^2+x^2\times(-4x)+x^2\times 2=3x^4-4x^3+2x^2$

(2) (与式)$=a^2\times(-2a)+5a\times(-2a)+(-3)\times(-2a)$

$=-2a^3-10a^2+6a$

(3) (与式)$=(-2x)\times 2x^2+(-2x)\times(-3xy)+(-2x)\times(-y^2)$

$=-4x^3+6x^2y+2xy^2$

(4) (与式)$=\dfrac{a^2}{3}\times 12b^2+\left(-\dfrac{ab}{6}\right)\times 12b^2+\left(-\dfrac{b^2}{4}\right)\times 12b^2=4a^2b^2-2ab^3-3b^4$

解説 文字を含んだ式の計算では，掛け算記号「×」は，ローマ字「x」と見分けにくいので，新しい掛け算記号「・」を使うようにしましょう。

(1) では 与式$=x^2\cdot 3x^2+x^2\cdot(-4x)+x^2\cdot 2$

$=3x^4-4x^3+2x^2$

と書けば見やすくなります。

12

次の式を展開せよ。

(1) $(3x^2-4)(2x+5)$　(2) $(4x-1)(x^2-5)$　(3) $(x-1)(x^2+2x-3)$

(4) $(a^2-2a-2)(a+3)$　(5) $(x^2-2xy-y^2)(x-3y)$　(6) $(a+2b)(a^2+3ab-2b^2)$

(1) (与式)$=3x^2(2x+5)-4(2x+5)$

$=6x^3+15x^2-8x-20$

(2) (与式)$=(4x-1)x^2+(4x-1)\cdot(-5)$

$=4x^3-x^2-20x+5$

(3) (与式)$=x(x^2+2x-3)-1\cdot(x^2+2x-3)$

$=x^3+2x^2-3x-x^2-2x+3$

$=x^3+x^2-5x+3$

(4) (与式)$=(a^2-2a-2)a+(a^2-2a-2)\cdot 3$

$=a^3-2a^2-2a+3a^2-6a-6$

$=a^3+a^2-8a-6$

(5) (与式)$=(x^2-2xy-y^2)x+(x^2-2xy-y^2)\cdot(-3y)$

$=x^3-2x^2y-xy^2-3x^2y+6xy^2+3y^3$

$=x^3-5x^2y+5xy^2+3y^3$

(6) (与式)$=a(a^2+3ab-2b^2)+2b(a^2+3ab-2b^2)$

$=a^3+3a^2b-2ab^2+2a^2b+6ab^2-4b^3$

$=a^3+5a^2b+4ab^2-4b^3$

解説　これらは，特に公式があるわけではない問題です。分配法則にしたがって，丁寧に展開して，同類項をまとめていきましょう。

13

次の式を展開せよ。

(1) $(x+4)^2$　(2) $(4a+3)^2$　(3) $(3x-1)^2$

(4) $(a+7b)^2$　(5) $(2x-5y)^2$　(6) $(a+3)(a-3)$

(7) $(x-10)(x+10)$　(8) $(6a+b)(6a-b)$　(9) $(5x-2y)(5x+2y)$

(1) (与式)$=x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2$

$=x^2+8x+16$

(2) (与式)$=(4a)^2+2\cdot 4a\cdot 3+3^2$

$=16a^2+24a+9$

(3) (与式)$=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 1+1^2$

$=9x^2-6x+1$

(4) (与式)$=a^2+2\cdot a\cdot 7b+(7b)^2$

$=a^2+14ab+49b^2$

(5) (与式)$=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5y+(5y)^2$

$=4x^2-20xy+25y^2$

(6) (与式)$=a^2-9$

(7) (与式)$=x^2-10^2=x^2-100$

(8) (与式)$=(6a)^2-b^2=36a^2-b^2$

(9) (与式)$=(5x)^2-(2y)^2=25x^2-4y^2$

解説　中学でおなじみの展開ですね。

分配法則で 上の問題番号 12 と同じように展開してもよいのですが、ここは

公式　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　（和と差の積の公式）

をしっかり使って展開できるようになりましょう。

14

次の式を展開せよ。

(1) $(x+1)(x+2)$　　(2) $(x-4)(x+2)$

(3) $(x+5)(x-1)$　　(4) $(a-2)(a-3)$

(5) $(x+7a)(x+a)$　　(6) $(a+4b)(a-3b)$

(7) $(a-b)(a+2b)$　　(8) $(x-2y)(x-13y)$

(1) (与式)$=x^2+3x+2$

(2) (与式)$=x^2-2x-8$

(3) (与式)$=x^2+4x-5$

(4) (与式)$=a^2-5a+6$

(5) (与式)$=x^2+(7a+a)x+7a\cdot a=x^2+8ax+7a^2$

(6) (与式)$=a^2+(4b-3b)a+4b\cdot(-3b)=a^2+ab-12b^2$

(7) (与式)$=a^2+(-b+2b)a+(-b)\cdot 2b=a^2+ab-2b^2$

(8) (与式)$=x^2+(-2y-13y)x+(-2y)\cdot(-13y)=x^2-15xy+26y^2$

解説　公式　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

を使っています。a や b のところに，数が入っている(1)～(4)は，慣れていると思います。暗算で一発で答えてしまいましょう。

一方，(5)～(8)は，文字の種類が増えています。落ち着いて公式を適用すれば大丈夫。これらも慣れてきたら，一発で答えてしまいたい問題です。

15

次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(3x+1)$　　(2) $(2a+3)(4a-1)$

(3) $(3x-2)(4x+3)$　　(4) $(4a-3)(a-2)$

(5) $(x+4y)(2x+3y)$　　(6) $(2a-b)(3a-2b)$

(7) $(5x-y)(4x+3y)$　　(8) $(8x+9a)(3x-4a)$

(1) (与式)$=1\cdot 3x^2+(1\cdot 1+2\cdot 3)x+2\cdot 1$

$=3x^2+7x+2$

(2) (与式)$=2\cdot 4a^2+\{2\cdot(-1)+3\cdot 4\}a+3\cdot(-1)$

$=8a^2+10a-3$

(3) (与式)$=3\cdot 4x^2+\{3\cdot 3+(-2)\cdot 4\}x+(-2)\cdot 3$

$=12x^2+x-6$

(4) (与式)$=4\cdot 1a^2+\{4\cdot(-2)+(-3)\cdot 1\}a+(-3)\cdot(-2)$

$=4a^2-11a+6$

(5) (与式)$=1\cdot 2x^2+(1\cdot 3y+4y\cdot 2)x+4y\cdot 3y$

$=2x^2+11xy+12y^2$

(6) (与式)$=2\cdot 3a^2+\{2\cdot(-2b)+(-b)\cdot 3\}a+(-b)\cdot(-2b)$

$=6a^2-7ab+2b^2$

(7) (与式)$=5\cdot 4x^2+\{5\cdot 3y+(-y)\cdot 4\}x+(-y)\cdot 3y$

$=20x^2+11xy-3y^2$

(8) (与式)$=8\cdot 3x^2+\{8\cdot(-4a)+9a\cdot 3\}x+9a\cdot(-4a)$

$=24x^2-5ax-36a^2$

解説

公式　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

が使える問題です。係数の作られ方を理解して，使うようにしましょう。

x^2 の係数は，左×左

x の係数は，外外＋内内

定数項は，右×右

です。左の模範解答では，丁寧に公式適用を見せた変形をしてくれていますが，最終的には，途中の式なく一発で展開できるようになっておいてください。

16

次の式を展開せよ。

(1) $(a+2b+3)(a+2b-3)$　(2) $(3x-2y-1)(3x-2y+1)$

(3) $(a-b+4)(a-b+2)$　(4) $(2x+3y-3)(2x+3y+6)$

(1) (与式)$=\{(a+2b)+3\}\{(a+2b)-3\}$

$=(a+2b)^2-3^2$

$=a^2+4ab+4b^2-9$

(2) (与式)$=\{(3x-2y)-1\}\{(3x-2y)+1\}$

$=(3x-2y)^2-1^2$

$=9x^2-12xy+4y^2-1$

(3) (与式)$=\{(a-b)+4\}\{(a-b)+2\}$

$=(a-b)^2+(4+2)(a-b)+4\cdot 2$

$=a^2-2ab+b^2+6a-6b+8$

(4) (与式)$=\{(2x+3y)-3\}\{(2x+3y)+6\}$

$=(2x+3y)^2+(-3+6)(2x+3y)+(-3)\cdot 6$

$=4x^2+12xy+9y^2+6x+9y-18$

解説

展開の工夫ができる問題です。

慌てずじっくりと式を見ると，カッコ内の３項のうち，２項が同じ項になっています。ですので，いきなり一つ一つを分配して展開するのではなく，同じ部分を一つのかたまりとみて，展開してみましょう。一つのかたまりに見えにくい人は，置き換えを使うとよいでしょう。だんだん慣れてくると左の解答のように置き換えずにできるようになると思います。というか，そうなってください。

別解 (1) $a+2b=X$ とおくと

与式$=(X+3)(X-3)$

$=X^2-9$

$=(a+2b)^2-9$

$=(a^2+4ab+4b^2)-9$

$=a^2+4ab+4b^2-9$

17

次の式を展開せよ。

(1) $(a-b+c)^2$　(2) $(x+y-z)^2$

(3) $(a-2b-3c)^2$　(4) $(2x-3y+z)^2$

(1) (与式)$=\{(a-b)+c\}^2$

$=(a-b)^2+2(a-b)c+c^2$

$=a^2-2ab+b^2+2ac-2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

(2) (与式)$=\{(x+y)-z\}^2$

$=(x+y)^2-2(x+y)z+z^2$

$=x^2+2xy+y^2-2xz-2yz+z^2$

$=x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$

(3) (与式)$=\{(a-2b)-3c\}^2$

$=(a-2b)^2-2(a-2b)\cdot 3c+9c^2$

$=a^2-4ab+4b^2-6ac+12bc+9c^2$

$=a^2+4b^2+9c^2-4ab+12bc-6ca$

(4) (与式)$=\{(2x-3y)+z\}^2$

$=(2x-3y)^2+2(2x-3y)z+z^2$

$=4x^2-12xy+9y^2+4xz-6yz+z^2$

$=4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx$

解説 (３項の和)^{2}の展開です。

左の模範解答は，(２項の和)^{2}の展開の公式

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

が使えるように，３項のうち前の２項を一つのかたまりとみて，工夫した展開をしています。そうすれば，計算ミスが減るメリットがあります。

また，(３項の和)^{2}の展開は次の公式を覚えていれば，比較的簡単に展開できます。

公式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

これも使えるようになってもらいたいです。以下に公式利用の別解を載せます。

別解

(1) 与式$=a^2+(-b)^2+c^2+2a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot c+2\cdot c\cdot a$
$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

(2) 与式$=x^2+y^2+(-z)^2+2xy+2\cdot y\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot x$
$=x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$

(3) 与式$=a^2+(-2b)^2+(-3c)^2+2\cdot a\cdot(-2b)+2\cdot(-2b)\cdot(-3c)+2\cdot(-3c)\cdot a$
$=a^2+4b^2+9c^2-4ab+12bc-6ca$

(4) 与式$=(2x)^2+(-3y)^2+z^2+2\cdot(2x)\cdot(-3y)+2\cdot(-3y)\cdot z+2\cdot z\cdot 2x$
$=4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx$

18

次の式を展開せよ。

(1)　$(x-3)^2(x+3)^2$　　(2)　$(a+2b)^2(a-2b)^2$

(3)　$(3x-y)^2(3x+y)^2$　　(4)　$(a-2)(a^2+4)(a+2)$

(5)　$(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$　　(6)　$(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)$

(1)　(与式)$=\{(x-3)(x+3)\}^2$

$=(x^2-9)^2$

$=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 9+9^2$

$=x^4-18x^2+81$

(2)　(与式)$=\{(a+2b)(a-2b)\}^2$

$=(a^2-4b^2)^2$

$=(a^2)^2-2\cdot a^2\cdot 4b^2+(4b^2)^2$

$=a^4-8a^2b^2+16b^4$

(3)　(与式)$=\{(3x-y)(3x+y)\}^2$

$=(9x^2-y^2)^2$

$=(9x^2)^2-2\cdot 9x^2\cdot y^2+(y^2)^2$

$=81x^4-18x^2y^2+y^4$

(4)　(与式)$=(a-2)(a+2)\times(a^2+4)$

$=(a^2-4)(a^2+4)$

$=a^4-16$

(5)　(与式)$=(a^2+b^2)\times(a-b)(a+b)$

$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$=a^4-b^4$

(6)　(与式)$=(2x+3y)(2x-3y)\times(4x^2+9y^2)$

$=\{(2x)^2-(3y)^2\}\times(4x^2+9y^2)$

$=(4x^2-9y^2)(4x^2+9y^2)$

$=16x^4-81y^4$

解説　掛ける順番を変える工夫で計算が速く正確にできる問題です。式の特徴を発見できるかがポイントになります。上手に掛ける組み合わせを考えると，和と差の公式が使えるのがわかるでしょうか。
もし，掛ける順番を変えずに見たまんま展開しても，もちろん結果は同じになりますが，面倒くさい展開になりますね。それでも，工夫はできることもあります。(1)で実践してみます。

別解　(1)　与式$=(x^2-6x+9)(x^2+6x+9)$
$=(x^2+9-6x)(x^2+9+6x)$ ←x^2+9 を一つのかたまりとすると
$=(x^2+9)^2-(6x)^2$　　和と差の積の公式が使える
$=x^4+18x^2+81-36x^2$
$=x^4-18x^2+81$

19

次の式を展開せよ。

(1)　$\left(3a-\frac{1}{2}b\right)^2$　　(2)　$\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{4}y\right)\left(\frac{5}{4}y+\frac{2}{3}x\right)$

(3)　$(y^2+3)(y^2-2)$　　(4)　$(2xy+3)(5xy-4)$

(5)　$(a^2+2a+2)(a^2+2a-2)$　　(6)　$(x^2-x-1)(x^2-x-3)$

(1)　(与式)$=(3a)^2-2\cdot 3a\cdot\frac{1}{2}b+\left(\frac{1}{2}b\right)^2=9a^2-3ab+\frac{1}{4}b^2$

(2)　(与式)$=\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{4}y\right)\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{4}y\right)=\frac{4}{9}x^2-\frac{25}{16}y^2$

(3)　(与式)$=(y^2)^2+y^2-6=y^4+y^2-6$

(4)　(与式)$=10(xy)^2+(-8+15)xy-12=10x^2y^2+7xy-12$

(5)　(与式)$=\{(a^2+2a)+2\}\{(a^2+2a)-2\}$

$=(a^2+2a)^2-2^2$

$=a^4+4a^3+4a^2-4$

(6)　(与式)$=\{(x^2-x)-1\}\{(x^2-x)-3\}$

$=(x^2-x)^2-4(x^2-x)+3$

$=x^4-2x^3+x^2-4x^2+4x+3$

$=x^4-2x^3-3x^2+4x+3$

20

次の式を展開せよ。

(1)　$2x(x^2+x+5)+4(1-4x-x^2)-x(5x-4+3x^2)$

(2)　$(2x+3y+1)(x-y+3)$

(3)　$(3x-2x^2-4)(x^2+5-3x)$

(1)　(与式)$=2x^3+2x^2+10x+4-16x-4x^2-5x^2+4x-3x^3$

$=(2-3)x^3+(2-4-5)x^2+(10-16+4)x+4$

$=-x^3-7x^2-2x+4$

(2)　(与式)$=2x(x-y+3)+3y(x-y+3)+(x-y+3)$

$=2x^2-2xy+6x+3xy-3y^2+9y+x-y+3$

$=2x^2+7x+xy-3y^2+8y+3$

(3)　(与式)$=3x(x^2+5-3x)-2x^2(x^2+5-3x)-4(x^2+5-3x)$

$=3x^3+15x-9x^2-2x^4-10x^2+6x^3-4x^2-20+12x$

$=-2x^4+9x^3-23x^2+27x-20$

21

次の式を展開し，x について降べきの順に整理せよ。

(1)　$(2x+a-1)^2$　　　　(2)　$(ax-2a-2)(3-x)$

(1)　(与式)$=\{2x+(a-1)\}^2$

$=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot(a-1)+(a-1)^2$

$=4x^2+(4a-4)x+(a^2-2a+1)$

(2)　(与式)$=(ax-2a-2)\cdot 3+(ax-2a-2)\cdot(-x)$

$=3ax-6a-6-ax^2+2ax+2x$

$=-ax^2+(5a+2)x-(6a+6)$

解説　(1)は(3項の和)^{2}の展開公式を用いると

別解　(1)　与式$=(2x)^2+a^2+(-1)^2+2\cdot 2x\cdot a+2\cdot a\cdot(-1)+2\cdot(-1)\cdot 2x$

$=4x^2+a^2+1+4ax-2a-4x$

$=4x^2+(4a-4)x+(a^2-2a+1)$

22

次の式を展開したときの，x^3 の係数を求めよ。

$(x^2+x+3)(-x^2+3x-1)$

x^3 の項は　$x^2\times 3x+x\times(-x^2)=3x^3-x^3=2x^3$

よって，x^3 の係数は　　2

解説　すべてを展開しつくしても，もちろん良いのであるが，必要な x^3 の係数ができる積だけに注目すれば，すべてを展開する手間ほどはかからないでしょう。

次の式を展開せよ。

(1)　$(a^2-2bc)(bc+3a^2)$　　(2)　$(m^2-2m-1)^2$

(3)　$(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$　　(4)　$(a+b-c-d)(a-b-c+d)$

(5)　$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$　　(6)　$(k+2)(k-1)(k^2-k+2)$

(7)　$(3x-y+1)(2x+y-1)$　　(8)　$(2a-2b+c)(a-b-c)$

(1)　(与式)$=(a^2-2bc)(3a^2+bc)$

$=1\cdot 3(a^2)^2+\{1\cdot bc+(-2bc)\cdot 3\}a^2+(-2bc)\cdot bc$　←$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ を利用している

$=3a^4-5a^2bc-2b^2c^2$

(2)　(与式)$=\{(m^2-2m)-1\}^2$

$=(m^2-2m)^2-2\cdot(m^2-2m)\cdot 1+1^2$

$=m^4-4m^3+4m^2-2m^2+4m+1$

$=m^4-4m^3+2m^2+4m+1$

$\boxed{\text{別解}}$　(与式)$=(m^2)^2+(-2m)^2+(-1)^2+2\cdot m^2\cdot(-2m)+2\cdot(-2m)\cdot(-1)+2\cdot(-1)\cdot m^2$

$=m^4+4m^2+1-4m^3+4m-2m^2$

$=m^4-4m^3+2m^2+4m+1$

(3)　(与式)$=\{(x-y)(x+y)\}^2\times(x^2+y^2)^2$

$=(x^2-y^2)^2(x^2+y^2)^2$

$=\{(x^2-y^2)(x^2+y^2)\}^2$

$=\{(x^2)^2-(y^2)^2\}^2$

$=(x^4-y^4)^2$

$=(x^4)^2-2\cdot x^4\cdot y^4+(y^4)^2$

$=x^8-2x^4y^4+y^8$

(4)　(与式)$=\{(a-c)+(b-d)\}\{(a-c)-(b-d)\}$　←この変形がポイント

$=(a-c)^2-(b-d)^2$

$=a^2-2ac+c^2-(b^2-2bd+d^2)$

$=a^2-b^2+c^2-d^2-2ac+2bd$

(5)　(与式)$=\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}$　←この変形がポイント

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=\{(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot y^2+(y^2)^2\}-x^2y^2$

$=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$

$=x^4+x^2y^2+y^4$

(6)　(与式)$=(k+2)(k-1)\times(k^2-k+2)$

$=(k^2+k-2)(k^2-k+2)$

$=\{k^2+(k-2)\}\{k^2-(k-2)\}$　←この変形がポイント

$=(k^2)^2-(k-2)^2=k^4-(k^2-4k+4)$

$=k^4-k^2+4k-4$

(7)　(与式)$=\{3x-(y-1)\}\{2x+(y-1)\}$　←この変形がポイント

$=3\cdot 2x^2+\{3\cdot(y-1)-(y-1)\cdot 2\}x-(y-1)^2$　←$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ を利用している

$=6x^2+(y-1)x-(y^2-2y+1)$

$=6x^2+xy-x-y^2+2y-1$

$=6x^2+xy-y^2-x+2y-1$

(8)　(与式)$=\{2(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}$　←この変形がポイント

$=2\cdot 1\cdot(a-b)^2+\{2\cdot(-c)+c\cdot 1\}(a-b)+c\cdot(-c)$ ←$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ を利用している

$=2(a^2-2ab+b^2)-c(a-b)-c^2$

$=2a^2-4ab+2b^2-ac+bc-c^2$

$=2a^2+2b^2-c^2-4ab+bc-ca$

24

次の式を展開せよ。
(1)　$x(x+1)(x+2)(x+3)$　　(2)　$(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$　　(3)　$(x-2)(x+5)(x-5)(x+2)$

(1)　(与式)$=x(x+3)\times(x+1)(x+2)$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$

$=(x^2+3x)\{(x^2+3x)+2\}$

$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)$

$=x^4+6x^3+9x^2+2x^2+6x$

$=x^4+6x^3+11x^2+6x$

(2)　(与式)$=(x+1)(x-4)\times(x-1)(x-2)$

$=(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)$

$=\{(x^2-3x)-4\}\{(x^2-3x)+2\}$

$=(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8$

$=x^4-6x^3+9x^2-2x^2+6x-8$

$=x^4-6x^3+7x^2+6x-8$

(3)　(与式)$=(x+2)(x-2)\times(x+5)(x-5)$

$=(x^2-4)(x^2-25)$

$=x^4-29x^2+100$

25

次の式を因数分解せよ。	
(1)　$ab-3bc$	(2)　$6a^2b+3ab^2$
(3)　$2x^3+2x^2y-6x^2$	(4)　$4xy^2-12x^2y+8xy$

(1)　(与式)$=b\cdot a-b\cdot 3c=b(a-3c)$

(2)　(与式)$=3ab\cdot 2a+3ab\cdot b=3ab(2a+b)$

(3)　(与式)$=2x^2\cdot x+2x^2\cdot y-2x^2\cdot 3=2x^2(x+y-3)$

(4)　(与式)$=4xy\cdot y-4xy\cdot 3x+4xy\cdot 2=4xy(y-3x+2)$

26

次の式を因数分解せよ。

(1) $(a-1)x-(a-1)$　　(2) $x(x+1)+(x+1)$

(3) $a(x-y)-2(y-x)$　　(4) $2c(a-3b)+(3b-a)d$

(1) (与式)$=(a-1)(x-1)$　　(2) (与式)$=(x+1)(x+1)=(x+1)^2$

(3) (与式)$=a(x-y)+2(x-y)=(x-y)(a+2)$　　(4) (与式)$=2c(a-3b)-(a-3b)d=(a-3b)(2c-d)$

27

次の式を因数分解せよ。

(1) x^2+6x+9　　(2) $x^2-8x+16$　　(3) $4-4a+a^2$

(4) $x^2+4xy+4y^2$　　(5) $9x^2+12xy+4y^2$　　(6) $a^2-10ab+25b^2$

(7) $16x^2-24xy+9y^2$　　(8) x^2-81　　(9) $9x^2-16$

(10) $4x^2-25y^2$　　(11) $64a^2-b^2$　　(12) $36x^2y^2-49$

(1) (与式)$=(x+3)^2$

(2) (与式)$=(x-4)^2$

(3) (与式)$=(2-a)^2=(a-2)^2$

(4) (与式)$=(x+2y)^2$

(5) (与式)$=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2=(3x+2y)^2$

(6) (与式)$=(a-5b)^2$

(7) (与式)$=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 3y+(3y)^2=(4x-3y)^2$

(8) (与式)$=(x+9)(x-9)$

(9) (与式)$=(3x+4)(3x-4)$

(10) (与式)$=(2x+5y)(2x-5y)$

(11) (与式)$=(8a+b)(8a-b)$

(12) (与式)$=(6xy+7)(6xy-7)$

28

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+7x+12$　　(2) $x^2-12x+35$　　(3) $a^2+7a-18$

(4) $x^2-3x-18$　　(5) y^2-9y+8　　(6) $y^2-6y-27$

(7) $t^2+10t+16$　　(8) $x^2-11x+30$　　(9) $y^2+7y-44$

(1) (与式)$=x^2+(3+4)x+3\cdot 4=(x+3)(x+4)$

(2) (与式)$=x^2+(-5-7)x+(-5)\cdot(-7)=(x-5)(x-7)$

(3) (与式)$=a^2+(-2+9)a+(-2)\cdot 9=(a-2)(a+9)$

(4) (与式)$=x^2+(3-6)x+3\cdot(-6)=(x+3)(x-6)$

(5) (与式)$=y^2+(-1-8)y+(-1)\cdot(-8)=(y-1)(y-8)$

(6) (与式)$=y^2+(3-9)y+3\cdot(-9)=(y+3)(y-9)$

(7) (与式)$=t^2+(2+8)t+2\cdot 8=(t+2)(t+8)$

(8) (与式)$=x^2+(-5-6)x+(-5)\cdot(-6)=(x-5)(x-6)$

(9) (与式)$=y^2+(-4+11)y+(-4)\cdot 11=(y-4)(y+11)$

29

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+8xy+15y^2$　(2) $x^2-9xy+8y^2$　(3) $x^2-2xy-24y^2$

(4) $x^2+12ax+20a^2$　(5) $x^2-5ax-36a^2$　(6) $x^2+8ax-48a^2$

(7) $a^2+11ab+18b^2$　(8) $a^2+ab-20b^2$　(9) $a^2-13ab+42b^2$

(1) (与式)$=x^2+(3y+5y)x+3y\cdot 5y$

$=(x+3y)(x+5y)$

(2) (与式)$=x^2+(-y-8y)x+(-y)\cdot(-8y)$

$=(x-y)(x-8y)$

(3) (与式)$=x^2+(4y-6y)x+4y\cdot(-6y)$

$=(x+4y)(x-6y)$

(4) (与式)$=x^2+(2a+10a)x+2a\cdot 10a$

$=(x+2a)(x+10a)$

(5) (与式)$=x^2+(4a-9a)x+4a\cdot(-9a)$

$=(x+4a)(x-9a)$

(6) (与式)$=x^2+(-4a+12a)x+(-4a)\cdot 12a$

$=(x-4a)(x+12a)$

(7) (与式)$=a^2+(2b+9b)a+2b\cdot 9b$

$=(a+2b)(a+9b)$

(8) (与式)$=a^2+(-4b+5b)a+(-4b)\cdot 5b$

$=(a-4b)(a+5b)$

(9) (与式)$=a^2+(-6b-7b)a+(-6b)\cdot(-7b)$

$=(a-6b)(a-7b)$

解説　一発で因数分解できるくらいになるよう，頑張りましょう。

30

次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2+5x+2$　(2) $2x^2+7x+3$　(3) $3x^2-7x+2$

(4) $6x^2+x-1$　(5) $8y^2+14y-15$　(6) $6y^2-5y-4$

(7) $2x^2-7ax+6a^2$　(8) $3x^2-11ax-4a^2$　(9) $5x^2+7xy-6y^2$

(10) $12x^2-7xy-12y^2$　(11) $6a^2+17ab+12b^2$　(12) $12a^2-23ab+10b^2$

(1) $3x^2+5x+2$

$=(x+1)(3x+2)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & 1 & \longrightarrow 3 \\ 3 & & 2 & \longrightarrow 2 \\ \hline 3 & & 2 & 5 \end{array}$$

(2) $2x^2+7x+3$

$=(x+3)(2x+1)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & 3 & \longrightarrow 6 \\ 2 & & 1 & \longrightarrow 1 \\ \hline 2 & & 3 & 7 \end{array}$$

(3) $3x^2-7x+2$

$=(x-2)(3x-1)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & -2 & \longrightarrow -6 \\ 3 & & -1 & \longrightarrow -1 \\ \hline 3 & & 2 & -7 \end{array}$$

(4) $6x^2+x-1$

$=(2x+1)(3x-1)$

$$\begin{array}{cccc} 2 & \times & 1 & \longrightarrow 3 \\ 3 & & -1 & \longrightarrow -2 \\ \hline 6 & & -1 & 1 \end{array}$$

(5) $8y^2+14y-15$

$=(2y+5)(4y-3)$

$$\begin{array}{cccc} 2 & \times & 5 & \longrightarrow 20 \\ 4 & & -3 & \longrightarrow -6 \\ \hline 8 & & -15 & 14 \end{array}$$

解説　たすきがけの因数分解

ここは，試行錯誤あるのみ。

一発で正解が導けることは，少ないでしょう。正しい組み合わせが発見できるまで，粘り強く探しましょう。

(6)　$6y^2-5y-4$

$=(2y+1)(3y-4)$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & -4 & \longrightarrow & -8 \\ \hline 6 & -4 & & -5 \end{array}$$

(7)　$2x^2-7ax+6a^2$

$=(x-2a)(2x-3a)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2a & \longrightarrow & -4a \\ 2 & -3a & \longrightarrow & -3a \\ \hline 2 & 6a^2 & & -7a \end{array}$$

(8)　$3x^2-11ax-4a^2$

$=(x-4a)(3x+a)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -4a & \longrightarrow & -12a \\ 3 & a & \longrightarrow & a \\ \hline 3 & -4a^2 & & -11a \end{array}$$

(9)　$5x^2+7xy-6y^2$

$=(x+2y)(5x-3y)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2y & \longrightarrow & 10y \\ 5 & -3y & \longrightarrow & -3y \\ \hline 5 & -6y^2 & & 7y \end{array}$$

(10)　$12x^2-7xy-12y^2$

$=(3x-4y)(4x+3y)$

$$\begin{array}{cccc} 3 & -4y & \longrightarrow & -16y \\ 4 & 3y & \longrightarrow & 9y \\ \hline 12 & -12y^2 & & -7y \end{array}$$

(11)　$6a^2+17ab+12b^2$

$=(2a+3b)(3a+4b)$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3b & \longrightarrow & 9b \\ 3 & 4b & \longrightarrow & 8b \\ \hline 6 & 12b^2 & & 17b \end{array}$$

(12)　$12a^2-23ab+10b^2$

$=(3a-2b)(4a-5b)$

$$\begin{array}{cccc} 3 & -2b & \longrightarrow & -8b \\ 4 & -5b & \longrightarrow & -15b \\ \hline 12 & 10b^2 & & -23b \end{array}$$

31

次の式を因数分解せよ。

(1)　$(x+y)^2-6(x+y)+8$　　(2)　$2(a-b)^2-3(a-b)+1$

(3)　$(x-y-1)^2-6(x-y-1)+9$　　(4)　$4(a+b+1)^2-5(a+b+1)-6$

(1)　$x+y=A$ とおく。

(与式)$=A^2-6A+8=(A-2)(A-4)$

$=\{(x+y)-2\}\{(x+y)-4\}$

$=(x+y-2)(x+y-4)$

解説　慣れるまでは，置き換えを使って，因数分解していきましょう。

(2)　$a-b=A$ とおく。

(与式)$=2A^2-3A+1=(A-1)(2A-1)$

$=\{(a-b)-1\}\{2(a-b)-1\}$

$=(a-b-1)(2a-2b-1)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & \longrightarrow & -2 \\ 2 & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline 2 & 1 & & -3 \end{array}$$

(3)　$x-y-1=A$ とおく。

(与式)$=A^2-6A+9=(A-3)^2$

$=\{(x-y-1)-3\}^2$

$=(x-y-4)^2$

(4)　$a+b+1=A$ とおく。

(与式)$=4A^2-5A-6=(A-2)(4A+3)$

$=\{(a+b+1)-2\}\{4(a+b+1)+3\}$

$=(a+b-1)(4a+4b+7)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & \longrightarrow & -8 \\ 4 & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \hline 4 & -6 & & -5 \end{array}$$

32

次の式を因数分解せよ。

(1) x^4-7x^2-18　　(2) x^4-256

(3) $81x^4-18x^2+1$　　(4) $4x^4-13x^2+9$

(5) $(x^2+3x)^2-6(x^2+3x)-16$　　(6) $(x^2-x)^2-22(x^2-x)+40$

(1) $x^2=A$ とおく。

(与式)$=A^2-7A-18=(A+2)(A-9)$

$=(x^2+2)(x^2-9)=(x^2+2)(x+3)(x-3)$

解説　慣れるまでは，置き換えを使って，因数分解していきましょう。

(2) $x^2=A$ とおく。

(与式)$=A^2-256=(A+16)(A-16)$

$=(x^2+16)(x^2-16)=(x^2+16)(x+4)(x-4)$

(3) $x^2=A$ とおく。

(与式)$=81A^2-18A+1=(9A-1)^2$

$=(9x^2-1)^2=\{(3x+1)(3x-1)\}^2$

$=(3x+1)^2(3x-1)^2$

(4) $x^2=A$ とおく。

(与式)$=4A^2-13A+9=(A-1)(4A-9)$

$=(x^2-1)(4x^2-9)$

$=(x+1)(x-1)(2x+3)(2x-3)$

(5) $x^2+3x=A$ とおく。

(与式)$=A^2-6A-16=(A+2)(A-8)$

$=\{(x^2+3x)+2\}\{(x^2+3x)-8\}$

$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-8)$

$=(x+1)(x+2)(x^2+3x-8)$

(6) $x^2-x=A$ とおく。

(与式)$=A^2-22A+40=(A-2)(A-20)$

$=\{(x^2-x)-2\}\{(x^2-x)-20\}$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-20)$

$=(x+1)(x-2)(x+4)(x-5)$

33

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+2xy-5x-6y+6$　　(2) $x^2-8a+2ax-16$

(3) $4-4y+2xy-x^2$　　(4) $a^2b+a-b-1$

(5) $a^2+b^2+bc-ca-2ab$　　(6) $4x^2y-4x^2z+y^2z-y^3$

(1) y について整理すると

(与式)$=(2x-6)y+x^2-5x+6$

$=2(x-3)y+(x-2)(x-3)$

$=(x-3)\{2y+(x-2)\}=(x-3)(x+2y-2)$

解説　2種類以上の文字が含まれるとき，次数の低い文字があれば，その文字に着目して，降べきの順に整理しましょう。そうして，共通因数がないか，じっくり式を眺めましょう。

(2)　a について整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (2x-8)a + x^2 - 16 \\
&= 2(x-4)a + (x+4)(x-4) \\
&= (x-4)\{2a + (x+4)\} = (x-4)(x+2a+4)
\end{aligned}
$$

(3)　y について整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (2x-4)y - (x^2-4) \\
&= 2(x-2)y - (x+2)(x-2) \\
&= (x-2)\{2y - (x+2)\} \\
&= (x-2)\{-(x-2y+2)\} \\
&= -(x-2)(x-2y+2)
\end{aligned}
$$

(4)　b について整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (a^2-1)b + (a-1) \\
&= (a+1)(a-1)b + (a-1) \\
&= (a-1)\{(a+1)b+1\} \\
&= (a-1)(ab+b+1)
\end{aligned}
$$

(5)　c について整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (b-a)c + (a^2-2ab+b^2) \\
&= -(a-b)c + (a-b)^2 \\
&= (a-b)\{-c + (a-b)\} \\
&= (a-b)(a-b-c)
\end{aligned}
$$

(6)　z について整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (-4x^2+y^2)z + (4x^2y-y^3) \\
&= -(4x^2-y^2)z + (4x^2-y^2)y \\
&= (4x^2-y^2)(-z+y) \\
&= (2x+y)(2x-y)(y-z)
\end{aligned}
$$

34

> 次の式を因数分解せよ。
>
> (1)　$x^2+(5y+1)x+(2y-1)(3y+2)$　　(2)　$x^2-(a+5)x-(2a^2-a-6)$
>
> (3)　$2x^2+xy-y^2-3x+1$　　(4)　$6x^2-7xy+2y^2-6x+5y-12$

(1)　$(\text{与式}) = \{x+(2y-1)\}\{x+(3y+2)\}$

$\qquad = (x+2y-1)(x+3y+2)$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \times & 2y-1 & \longrightarrow & 2y-1 \\
1 & & 3y+2 & \longrightarrow & 3y+2 \\
\hline
1 & & (2y-1)(3y+2) & & 5y+1
\end{array}
$$

解説　ここが正念場。

何度も挑戦して，習得してもらいたいです。Never give up.

(2)　$(\text{与式}) = x^2+(-a-5)x-(2a^2-a-6)$

$$
\begin{aligned}
&= x^2+(-a-5)x-(a-2)(2a+3) \\
&= \{x+(a-2)\}\{x-(2a+3)\} \\
&= (x+a-2)(x-2a-3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \times & a-2 & \longrightarrow & a-2 \\
1 & & -(2a+3) & \longrightarrow & -2a-3 \\
\hline
1 & & -(a-2)(2a+3) & & -a-5
\end{array}
$$

(3)　x について整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 2x^2+(y-3)x-(y^2-1) \\
&= 2x^2+(y-3)x-(y+1)(y-1) \\
&= \{x+(y-1)\}\{2x-(y+1)\} \\
&= (x+y-1)(2x-y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \times & y-1 & \longrightarrow & 2y-2 \\
2 & & -(y+1) & \longrightarrow & -y-1 \\
\hline
2 & & -(y+1)(y-1) & & y-3
\end{array}
$$

(4)　x について整理すると

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 6x^2+(-7y-6)x+(2y^2+5y-12)\\
&= 6x^2+(-7y-6)x+(y+4)(2y-3)\\
&= \{2x-(y+4)\}\{3x-(2y-3)\}\\
&= (2x-y-4)(3x-2y+3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
2 & \times & -(y+4) & \longrightarrow & -3y-12\\
3 & & -(2y-3) & \longrightarrow & -4y+6\\
\hline
6 & & (y+4)(2y-3) & & -7y-6
\end{array}
$$

35

次の式を因数分解せよ。

(1)　$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$　　(2)　$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

(1)　$(\text{与式})=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

$$
\begin{aligned}
&= (b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2\\
&= (b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\
&= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\
&= (b+c)(a+b)(a+c)=(a+b)(b+c)(c+a)
\end{aligned}
$$

解説　因数分解の問題なのに，糸口が見つからないので，しぶしぶ展開して，１文字に着目し，整理しましょう。

(2)　$(\text{与式})=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+(b^2c+bc^2)$

$$
\begin{aligned}
&= (b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)\\
&= 1\cdot(b+c)a^2+\{1\cdot bc+(b+c)^2\}a+(b+c)\cdot bc\\
&= \{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}=(a+b+c)(ab+bc+ca)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \times & b+c & \longrightarrow & b^2+2bc+c^2\\
b+c & & bc & \longrightarrow & bc\\
\hline
b+c & & bc(b+c) & & b^2+3bc+c^2
\end{array}
$$

36

次の式を展開せよ。

(1)　$(a-2)^3$　　(2)　$(3x+1)^3$

(3)　$(2x+3y)^3$　　(4)　$(4a-3b)^3$

(5)　$(x+3)(x^2-3x+9)$　　(6)　$(a-1)(a^2+a+1)$

(7)　$(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$　　(8)　$(3x-5y)(9x^2+15xy+25y^2)$

(1)　$(\text{与式})=a^3-3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2-2^3$

$\qquad =a^3-6a^2+12a-8$

解説　3乗の展開公式を利用できるようになるための問題です。一発で展開できるように，練習しましょう。

(2)　$(\text{与式})=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 1+3\cdot 3x\cdot 1^2+1^3$

$\qquad =27x^3+27x^2+9x+1$

(3)　$(\text{与式})=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot(3y)^2+(3y)^3$

$\qquad =8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

(4)　$(\text{与式})=(4a)^3-3\cdot(4a)^2\cdot 3b+3\cdot 4a\cdot(3b)^2-(3b)^3$

$\qquad =64a^3-144a^2b+108ab^2-27b^3$

(5)　$(\text{与式})=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=x^3+3^3=x^3+27$

(6)　$(\text{与式})=(a-1)(a^2+a\cdot 1+1^2)=a^3-1^3=a^3-1$

(7)　$(\text{与式})=(2a+b)\{(2a)^2-2a\cdot b+b^2\}=(2a)^3+b^3=8a^3+b^3$

(8)　$(\text{与式})=(3x-5y)\{(3x)^2+3x\cdot 5y+(5y)^2\}=(3x)^3-(5y)^3=27x^3-125y^3$

37

次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3-64　　(2)　$8a^3+27$　　(3)　$64a^3-b^3$　　(4)　$125x^3+8y^3$

(1)　$(与式)=x^3-4^3=(x-4)(x^2+x\cdot 4+4^2)$

$=(x-4)(x^2+4x+16)$

(2)　$(与式)=(2a)^3+3^3=(2a+3)\{(2a)^2-2a\cdot 3+3^2\}$

$=(2a+3)(4a^2-6a+9)$

(3)　$(与式)=(4a)^3-b^3=(4a-b)\{(4a)^2+4a\cdot b+b^2\}$

$=(4a-b)(16a^2+4ab+b^2)$

(4)　$(与式)=(5x)^3+(2y)^3$

$=(5x+2y)\{(5x)^2-5x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$=(5x+2y)(25x^2-10xy+4y^2)$

解説

公式

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

を利用できるようになるための問題です

38

次の式を因数分解せよ。

(1)　$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+15$　　(2)　$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$

(1)　$(与式)=(x-1)(x-7)\times(x-3)(x-5)+15$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+15$

$=\{(x^2-8x)+7\}\{(x^2-8x)+15\}+15$

$=\{(x^2-8x)^2+22(x^2-8x)+105\}+15$

$=(x^2-8x)^2+22(x^2-8x)+120$

$=\{(x^2-8x)+12\}\{(x^2-8x)+10\}$

$=(x^2-8x+12)(x^2-8x+10)$

$=(x-2)(x-6)(x^2-8x+10)$

(2)　$(与式)=(x-1)(x+3)\times(x-2)(x+4)+4$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+4$

$=\{(x^2+2x)-3\}\{(x^2+2x)-8\}+4$

$=\{(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24\}+4$

$=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+28$

$=\{(x^2+2x)-4\}\{(x^2+2x)-7\}$

$=(x^2+2x-4)(x^2+2x-7)$

解説　ここも糸口が見つからないので，しぶしぶ展開して(部分的に)共通因数を作り出しましょう。

39

次の式を因数分解せよ。

(1)　$16x^4y+2xy^4$　　(2)　x^6-y^6　　(3)　$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

(1)　$(与式)=2xy(8x^3+y^3)$

$=2xy\{(2x)^3+y^3\}$

$=2xy(2x+y)\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\}$

$=2xy(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$

(2)　(与式)$=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

別解　(与式)$=(x^2)^3-(y^2)^3$

$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=(x^2-y^2)\{(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2\}$

$=(x^2-y^2)\{(x^2+y^2)^2-(xy)^2\}$

$=(x^2-y^2)\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}$

$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

(3)　(与式)$=(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+(b^3-3b^2c+3bc^2-c^3)+(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)$

$=-3(b-c)a^2+3(b^2-c^2)a-3bc(b-c)$

$=-3(b-c)a^2+3(b+c)(b-c)a-3bc(b-c)$

$=-3(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=-3(b-c)(a-b)(a-c)$

$=3(a-b)(b-c)(c-a)$