

今週の数学の学習ポイント 2 4月第5週 5月第1週

こんにちは。

今週も『数学Ⅰ』は1週間に3時間程度、『数学A』は1週間に2時間程度の学習を頑張ってください。

今週の目安としては、**数学Ⅰは第9回くらいまで、数学Aは第6回くらいまで**でしようか。

目安よりも**遅れそうだなあ**という人は、**少し多めに**に取り組めるように、時間割を修正してください。

目安よりも**進みそうだなあ**という人は、慌てずに以前取り組んだ問題で、初回に間違ったところを重点的にやり直しをしてみてください。かたがたでしょうか。「2歩進んで1歩振り返る」のイメージ。**前回の復習をしつつ、次のステップに進む。**反復学習が大切です。

『数学Ⅰ』 第9回 (教科書 p.24～26, 33 の Column 3 TRIAL 問題番号 40～42, 44)

ここからは、数の世界を学ぶ、「第2節 実数」の単元に入ります。

「数」にも、いろいろありますね。物を数えるときは、1, 2, … とごく自然に数える「**自然数**(natural number)」

そして、自然数を用いて加減乗除を考えたとき、足し算・掛け算は、何の問題もないが、引き算では、自然数の世界には、必ずしも答えがあるとは限らなくなり不自由になりました。そこで、「負の整数」と「0」を考え出せば、どのような引き算に対しても、答えを見つけられることができるようになりました。これが「**整数**(integer)」です。しかし、整数の世界でも、加減乗除を考えたとき、必ずしも答えが見つからない計算が残りました。そうです。割り算ですね。 $4 \div 2$ の答えは整数で見つかりますが、 $5 \div 2$ の答えは整数では見つけれられません。

(**注意** 商2, 余り1という答えなら整数の範囲ですが、 $4 \div 2 = 2$ のような等式では表せません。 $5 \div 2 = 2 \cdots 1$ は、一見すると等式のように見えますが、これは「**偽**」の等式です。「…」という記号は、商と余りを区切るためだけに考え出された小学校までの表記で、「数学」の計算では使いません。ですので、 $5 \div 2 = 2 \cdots 1$ という式は、等式とは認められていません。今後、充分に注意しておかねばならない大切な事実です。)

そこで、 $\frac{\text{割られる数}}{\text{割る数}}$ と書く $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ など **有理数**(rational number) を考え出しました。有理数まで、数の世界

を広げると、加減乗除どの計算でも、必ず答えを見つけられるようになります。先ほどの例であれば、 $5 \div 2 = \frac{5}{2}$ という等式が成り立ちます。整数以外の有理数を小数で表すと、2種類に分類できます。

① $\frac{5}{2} = 2.5$ 有限小数

② $\frac{5}{3} = 1.666 \cdots = 1.\dot{6}$ 無限小数 (より詳しく見ると、循環する数が6である**循環小数**)

②' $\frac{5}{7} = 0.7142857142857 \cdots = 0.\dot{7}1428\dot{5}$ 無限小数 (より詳しく見ると、循環する数が714285である**循環小数**)

逆に、① 有限小数 と ② 循環小数 は、必ず分数で表すことができます。

ここで、③ として、**循環しない無限小数**という数も発見された。それは、2次方程式のところでは、

2乗したら1になる数つまり、 $x^2 = 1$ を満たす x は、1 と -1 と整数の答え。

2乗したら $\frac{1}{4}$ になる数つまり、 $x^2 = \frac{1}{4}$ を満たす x は、 $\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ と有理数の答え。

2乗したら2になる数つまり、 $x^2 = 2$ を満たす x は、なかなかそのものズバリの数が見つかりません。

$$1.4^2 = 1.96$$

$$1.41^2 = 1.9881$$

$$1.414^2 = 1.999396$$

$$1.4142^2 = 1.99996164$$

$$1.41421^2 = 1.9999899241$$

$$1.414213^2 = 1.999998409369$$

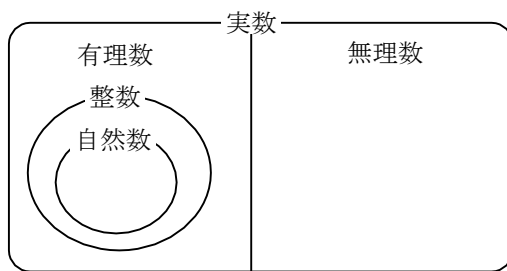
このように、2乗して2になる数を根気よく探してみても、ピッタリと2になることはなく近似値しか求まりません。この作業を繰り返すと

1.41421356237309…… と循環する部分を持たない無限小数が現れました。

これが、**無理数**と名付けられました。また、2乗したら2になる数 1.414213…

は、なかなか書きにくいので $\sqrt{2}$ と書き表すことにしたのでした。

このように、自然数、整数、有理数、無理数と数の世界をどんどんと広げてきました。これらをひっくるめた数を「**実数**」(real number)と呼ぶことにします。数学Aで学んだベン図で表すと、



だいたい値を知っておくと、何かと役立ちます。語呂合わせとともに覚えておきましょう。

$$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots \text{ (ひとよひとよにひとみごろ【一夜一夜に人見ごろ】)}$$

$$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots \text{ (ひとなみにおごれや【人並みに奢れや】)}$$

$$\sqrt{5} = 2.2360679\cdots \text{ (ふじさんろくおうむなく【富士山麓オウム鳴く】)}$$

$$\sqrt{6} = 2.449489\cdots \text{ (によよくよわく【似よ、よく弱く】)}$$

$$\sqrt{7} = 2.64575\cdots \text{ (なにむしいない【菜に虫いない】 ㊦「菜」は\sqrt{7}の7を表している。)}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ なので、}\sqrt{2} \text{ を2倍すればよいですね。} 2 \times 1.414\cdots = 2.828\cdots \text{ くらい}$$

$$\sqrt{10} = 3.16227\cdots \text{ (みいろにふな【三色に鯛】)}$$

また、 $\sqrt{10}$ は円周率 $\pi (=3.1415\cdots)$ より少し大きいことも知っておきましょう。

『数学 I』 第10回 (教科書 p.27～29 3 TRIAL 問題番号 43, 45～50)

数直線とは、1本の**直線**に**数**を対応させた直線のこと。この数直線上には、ありとあらゆる実数が対応しています。逆に、**数直線上の1つの点には、必ずそれに対応した実数が存在します**。その実数をその点の**座標**と言います。

書き表し方 **座標が a である点 P を $P(a)$ と表します**。1本の数直線しかないの、座標も1つの実数だけ。

中学校ですでに学んだ座標平面では、2本の数直線で定められたものなので、座標は2つの実数で表現しましたね。

① 絶対値について

実数 a の絶対値とは、原点 $O(0)$ と点 $P(a)$ の間の**距離**(原点から点 P までの距離)のこと。距離なので、マイナスは考えません。高校では、新しく **絶対値記号**を導入します。

$$\text{実数 } a \text{ の絶対値} = |a|$$

この a の両端の「棒」が絶対値記号です。数字の1と見分けがつくように、少し長めに書くようにしてください。

実数 a と書くだけでは、 a はどんな数かわかりませんよね。

もし、 a が**正の数**であるならば、この a の絶対値(原点との距離)は、 **a そのもの**と同じですよ。

$$|3| = 3 \text{ みたいになります。}$$

一方、 a が**負の数**であるならば、この a の絶対値(原点との距離)を、 a そのままと考えると**負の距離**を意味してしまい、変なことになりますね。では、原点と点 $P(a)$ との距離はどう考えればよいか。

具体的に考えてみれば、わかります。

$$\text{原点と点 } P(-3) \text{ との距離は、} 3 \text{ です。だから、} |-3| = 3$$

この距離3を、座標 -3 を使ってがんばって表すと、 $-(-3)$ となります。

座標に -1 をかけると、正の数になり、距離と一緒にあります。

つまり、 a が**負の数**であるならば、 **$-a$ が a の絶対値** になります。

以上をまとめると、 a が正の数または0のときは、 **$|a| = a$**

a が負の数のときならば、 **$|a| = -a$**

② 平方根について

「平方」とは、2乗(にじょう)のことですね。これを時々、「自乗(じじょう)」と言うことがあります。
自乗とは、「自分自身を乗ずる」からきた言い方です。

平方 = 2乗 = 自乗

いろいろな言い方をされますが、同じことです。

立方 = 3乗

「根(こん)」とは、元となるものを意味しています。根(ね)を英語で言うと、**root**(ルート)といいます。
つまり、平方根とは、「2乗する前の数」を意味しているのです。

1の平方根は、1と-1ですね。 $1^2=1$ であるし、さらに $(-1)^2=1$ も成り立ちますからね。

2の平方根は、1.414213546...と-1.41421356...の2つです。

$(1.41421356)^2$ を電卓で計算してみてください。おおよそ2になるでしょう。でも2にはなりませんね。

このことは、前頁で述べたとおりです。ですので、 $1.41421356...=\sqrt{2}$ と書くことにしたのです。

ですので、2の平方根は $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ の2つといえるのです。これを $\pm\sqrt{2}$ とセットで書くこともできますね。

さて、ときどき、 $\sqrt{4}=\pm 2$ と書く人がいます。これは間違いになります。

「4の平方根は？」と聞かれれば「 ± 2 」と答えるのは、正しいのですが。

「 $\sqrt{4}$ は何？」と聞かれたら、「2」と答えましょう。この違い、分かりますか？

$\sqrt{4}$ とは、日本語では「4の平方根のうち、正の方」を、自動的に表しているのです。

「4の平方根のうち、負の方」は、「 $-\sqrt{4}$ 」で表しているからです。

ですので、「 $\sqrt{4}=\pm 2$ 」と書くのは、間違いなのです。

③ 平方根の性質2について

$\sqrt{a^2}=a$ か？

教科書 p.28 例 20 にあるとおり、 $\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$ (i)

$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$ (ii) となりますので、

$\sqrt{3^2}=\sqrt{(-3)^2}$ であることがわかります。

ですが、 $\sqrt{\quad}$ の中が、(文字)²となっている $\sqrt{a^2}$ みたいなときは、**要注意**です。

$\sqrt{a^2}=a$ が成り立つのは、 a が正の数か0のときだけだからです。

もし、 a が負の数のときは、 $\sqrt{a^2}=a$ は正しくありません。上の(ii)を見てください。

$\sqrt{(-3)^2}=-3$ ではないでしょう？

-3を用いた表現を使うと $\sqrt{(-3)^2}=-(-3)$ となりますね。具体的な数が $\sqrt{\quad}$ の中にある時は、こんな面倒なことは通常しません。が、 $\sqrt{\quad}$ の中が(文字)²の時は、その文字の正負で場合を分けて書かなければ、正しくありません。

よって、 a が正の数または0のときならば、 $\sqrt{a^2}=a$ でよいが

a が負の数のときならば、 $\sqrt{a^2}=-a$ になるのです。

このことがしっかり分かるまで、たとえ1時間かかっても「**今**」分かるようになっておいてください。

完成ノート p.22 問題番号 28 について

意外によく間違えますよ。私の予想では、200人で、50人は間違えた図を描くのではないかと考えています。私のこれまでの経験から本当によく間違えたイメージで問題を解いてしまうんです。思い込みって怖いんです。ですので、この問題28は、**正四面体を完成ノートの余白に描いておいてください。**

『数学A』 第7回 (教科書 p.20 3 TRIAL 問題番号 29 ~ 32)

小学校で学んだ「約数」が徐々に登場。小学生のときは、地道に一つひとつ書き上げていたと思います。高校では、「約数」自体も扱いますが、ここでは、「正の約数の個数」だけに焦点をあてています。

「正の約数の個数」だけなら、地道に書き上げてから数えなくても、単純な計算ですぐに求まるのです。

教科書 p.20 応用例題 3 (2)

①	1											72
②	1	2										36 72
③	1	2	3									24 36 72
④	1	2	3	4								18 24 36 72
⑤	1	2	3	4	6							12 18 24 36 72
⑥	1	2	3	4	6	8	9	12	18	24	36	72

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 12 & 18 & 24 & 36 & 72 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 2^2 & 2 \cdot 3 & 2^3 & 3^2 & 2^2 \cdot 3 & 2 \cdot 3^2 & 2^3 \cdot 3 & 2^2 \cdot 3^2 & 2^3 \cdot 3^2 \end{array}$$

72 の正の約数	1	3	3 ²
1	1・1	1・3	1・3 ²
2	2・1	2・3	2・3 ²
2 ²	2 ² ・1	2 ² ・3	2 ² ・3 ²
2 ³	2 ³ ・1	2 ³ ・3	2 ³ ・3 ²

(3+1) は、 2^3 の正の約数 4 個を意味しています。 2^3 の正の約数は 1, 2, 2^2 , 2^3 の 4 個ありますね。指数だけでは、1 自身を表せていないので、1 を加えているのです。同様に、

(2+1) は、 3^2 の正の約数 3 個を意味しています。 3^2 の正の約数は 1, 3, 3^2 の 3 個ありますね。

そして、この (3+1) と (2+1) を掛けている理由は、上の表を見てもらえればわかります。72 の約数は、必ず 2^3 の約数と 3^2 の約数の積で表せています。 2^3 の正の約数一つ一つに対して、 3^2 の 3 個の約数が対応している。この状況は、以前学んだ積の法則利用場面ですね。このことが腑に落ちるまでじっくりと眺め、考えてください。