今週の数学の学習ポイント６　５月 第５週

こんにちは。数学Ⅰは第 21 回まで，数学Ａは第 14 回までのポイント解説です。

教科書の本文，例，例題，応用例題を理解したら，完成ノートの問題に取り組んでください。

（注　教科書の練習，補充問題，章末問題は取り組まなくてよいです。）

	数Ⅰ	教科書の ページ数	完成ノートの 問題番号	数A	教科書の ページ数	完成ノートの 問題番号
5/25～	第19回 第20回 第21回	p.50 ～ 55 (特に 例6) p.56, 57, 58 p.59, 60 のＥまで	85 ～ 94 の 10 題 95, 96, 97, 98 99, 100, 101	第13回 第14回	p.33, 34 なし	55, 56, 66 60, 61, 62, 64, 65

『数学Ⅰ』　第19回（教科書 p.50～55 (特に 例6）３TRIAL 問題番号 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94）

集合

数学Ａの教科書 p.6 ～10 とこの数学Ⅰのp.50 ～ 55 はほとんど一緒です。

違いを挙げるならば，「Ｄ 共通部分と和集合」のページの 例6 です。

数学Ⅰの教科書 p.53 では，例6 (2) が追加されています。数学Ａで学んだときは，不等式がまだ登場していなかったからです。ただそれだけで，内容としては，既に学んだ通りなのです。

時間が経っているでしょうから，復習として上記の３TRIALの問題に取り組むだけでも良いと思います。

『数学Ⅰ』　第20回（教科書 p.56～58　３TRIAL 問題番号 95, 96, 97, 98）
『数学Ⅰ』　第21回（教科書 p.59, 60 のＥまで　３TRIAL 問題番号 99, 100, 101）

言葉の定義（意味の約束）を，丁寧に読んで追っておこう。

p.56 ～ 60 のＥ までに出てくる用語について，各自，まとめておこう。

命題　＿＿＿＿＿＿ か ＿＿＿＿＿＿ かが定まる文や式のこと。

（x に関する）条件

文字 x を含む文や式で，x に値を代入することでが＿＿＿＿＿が定まるもの。

命題 $p \Rightarrow q$

２つの条件 p，q について，「p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表した書き方。

仮定と結論

命題 $p \Rightarrow q$ において，p が＿＿＿＿，q が＿＿＿＿

反例

命題 $p \Rightarrow q$ が偽であるとき，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿の例。

必要条件と十分条件と必要十分条件

命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとき，q は p であるための＿＿＿＿＿であるという。

命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとき，p は q であるための＿＿＿＿＿であるという。

命題 $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ がともに真であるとき，q は p であるための＿＿＿＿＿＿＿＿であるという。

命題 $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ がともに真であるとき，p は q であるための＿＿＿＿＿＿＿＿であるという。

同値（同値記号 $\Leftrightarrow$ ）

命題 $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ がともに真であるとき，すなわち，$p \Leftrightarrow q$ **が成り立つとき**，p と q は＿＿＿であるという。

条件 p の否定（記号 $\overline{}$　読み方 バー）

条件 p に対して，条件「＿＿＿＿＿」ことを，p の否定という。

『数学Ａ』　第13回（教科書 p.33, 34　3 TRIAL 問題番号 55, 56, 66 ）

同じものを含む順列

今まで学んできた「順列」「組合せ」は，異なるものの中から選んだり，並べたりをしてきました。

ここでは，「同じものを含む順列」と今まで「組合せ」を学んできたのに、「順列」が再び登場しました。

なぜなら，「異なるものの順列」の応用として「同じものを含む順列」の総数の数え方に「組合せ」の考え方を利用すれば，数えられることが分かったからなのです。

「同じものを含む順列」の総数の数え方は、次の２通りあります。どちらでも、当然ですが同じ答えになります。

$\boxed{例}$　a 4 個，b 3 個，c 2 個の 9 個の文字全部を 1 列に並べる順列の総数

【考え方１】　組合せの考え方利用

異なる 9 個の文字を 1 列に並べるのであれば， 9! 通りの並べ方で求まりましたが，これは 9 個すべて異なっているからできる数え方でした。

しかし，a という文字 4 個は，特に指示がありません。ですので，この a は区別できない 4 個であると考えます。

では，どのようにして数えるか。それは， 9 個の文字を置く場所は異なる場所であることから，この文字を置く場所に注目するのです。どういうことかと言うと， 1 列に並べるので，場所には， 1 番最初の場所，その次である 2 番目の場所，……，最後 9 番目の場所という風に場所はすべて区別できます。これが置く場所は異なるという意味です。

＿　＿　＿　＿　＿　＿　＿　＿　＿　←文字を置く場所

①　②　③　④　⑤　⑥　⑦　⑧　⑨　←文字を置く場所の名前

異なる場所にまず，a 4 個を置くとします。そのとき，どの 4 ヵ所に a を置くかを決めます。この決め方が，組合せになります。例えば，①②③④に a を置くとします。そのとき， 1 個目の a の置く場所は，④ としましょうか。次に 2 個目の a は，③とします。でも，結果として 1 個目の a を ③，2 個目の a を ④ に置いたと言われても区別できないでしょう。つまり，置く場所を選ぶだけで，置き方は考えなくてよいのです。これが，選ぶだけで並べない「組合せ」を使う理由なのです。

［1］　異なる 9 個の場所から a を置く 4 個の場所の選び方は，${}_9C_4$ 通り

［2］　引き続き，残り 5 個の場所から b を置く 3 個の場所の選び方は，${}_5C_3$ 通り

［3］　最後に，残り 2 個の場所から c を置く 2 個の場所の選び方は， ${}_2C_2$ 通り（当然ですが 1 通りです）

積の法則より，求める順列の総数は，

$${}_9C_4 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \times \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{2\cdot1}{2\cdot1} = 1260\text{（通り）}$$

となります。

【考え方２】　すべて異なるものと区別し，並べてからその区別を外す考え方

9 個の文字がすべて異なるものとまず，みなします。

例えば，a_1，a_2，a_3，a_4，b_1，b_2，b_3，c_1，c_2 とすれば，区別できますね。これらを 1 列に並べる方法の総数は，すべて異なるので，通常の順列の数え方になります。それは，$9!$ 通りです。

ここからが本題です。この区別は，本来勝手にこちらが付けたものですので，右下に添えた数字を取らなければなりません。b に着目して，この $9!$ 通りの順列のいくつかを書き出してみます。

$a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4c_1c_2$　　$a_1b_1a_2b_3a_3b_2a_4c_1c_2$

$a_1b_2a_2b_1a_3b_3a_4c_1c_2$　　$a_1b_2a_2b_3a_3b_1a_4c_1c_2$

$a_1b_3a_2b_1a_3b_2a_4c_1c_2$　　$a_1b_3a_2b_2a_3b_1a_4c_1c_2$　の 6 通りに注目します。

この 6 通りは，b の区別を取ってみると

$a_1ba_2ba_3ba_4c_1c_2$　　$a_1ba_2ba_3ba_4c_1c_2$

$a_1ba_2ba_3ba_4c_1c_2$　　$a_1ba_2ba_3ba_4c_1c_2$

$a_1ba_2ba_3ba_4c_1c_2$　　$a_1ba_2ba_3ba_4c_1c_2$

と 6 通りすべて全く同じものになってしまいました。つまり，6 通り→1 通りとなりました。b に着目したら，6 通りある並べ方が b の右下に添えた数字を取る（＝区別を取る）と，1 通りに減るのです。 これは，上記以外の他の並べ方でも，b に着目すると，6 通りずつ（＝ $3!$ 通りずつ）のグループができ，区別を取ると 1 通りずつに減ります。（$3!$ で割ったら，この 1 通りに減らすことができます。この割って減らす方法は，円順列の数え方の２番目の考え方と同じですね。）

b の区別を取るだけではなく，同時に a と c の区別も取りますので，$4!$ と $2!$ でも割って減らす必要があります。

したがって，求める順列の総数は

$$\frac{9!}{4!\times 3!\times 2!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1}$$
$$=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\times\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}\times\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1}={}_9C_4\times{}_5C_3\times{}_2C_2$$

と，【考え方１】と同じ結果が得られるのがわかるでしょう。

まとめると，同じものを含む順列の総数は，【組合せの考え方】か【区別して並べてから区別を取る考え方】のどちらかで計算してもらえれば，良いのです。

教科書 p.34　例題 8　7 個の数字 1，1，1，2，2，3，3 の全部を使って，7 桁の整数を作るとき，整数は何個作れるか。

教科書の解答　同じ数字が 3 個，2 個，2 個あり，これらを 1 列に並べるから

$$\frac{7!}{3!2!2!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=210\ (\text{個})$$

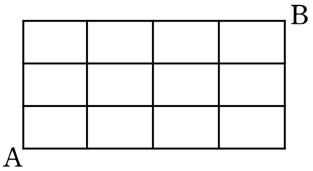
別解　異なる 7 個の場所に 3 個の 1 の置き方は，${}_7C_3$ 通り

残り 4 個の場所に 2 個の 2 の置き方は，${}_4C_2$ 通り

残り 2 個の場所に 2 個の 3 の置き方は，1 通り

積の法則より，${}_7C_3\times{}_4C_2\times 1=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\times\dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=210\ (\text{個})$

教科書p.34　応用例題７【最短経路の総数】



　A から B に遠回りせず行く最短の道順の総数が問われている。

　新興住宅地や京都の街並みなどは，このような碁盤の目のような街になっていることがある。１つ１つ経路を書いていくこともできるが，ここは，考え方１つであっさり解決する方法を紹介しよう。それは，B まで行くのに，どのような道順であっても結局は，右方向に 4 回移動し，上方向には 3 回移動していることになる。道順は，矢印で表すことができる。右矢印と上矢印である。4 個の右矢印「→」と 3 個の上矢印「↑」で A から B までの道順を書き表すことができる。言い換えると 4 個の右矢印「→」と 3 個の上矢印「↑」を 1 列に並べる方法の総数を数えられれば，道順の総数がわかるということである。よって，同じものを含む順列の問題となる。

　問題番号 66

(1)　P から R の道順を数え，引き続き R から Q までの道順を数える。「引き続き」なので，積の法則が成り立つ。

(2)　×の場所を通る道順を数え，全体の道順から引けばよい。

(3)　R から × を通り，Q に行く道順を数え，R から Q までの道順から引くことがまず第一歩。

　『数学Ａ』　第14回（教科書 なし　3 TRIAL 問題番号 60, 61, 62, 64, 65 ）

　これら 5 問の問題は，いままでの学習を基礎とする応用問題である。

問題番号 60　「辺を共有しない」三角形は，直接数えるのは大変である。数えやすいものを考えてみよう。

(正八角形と辺を共有しない三角形の個数)＝(すべての三角形の個数)―(正八角形と辺を共有する三角形)

＝(すべての三角形の個数)―(1 辺共有の三角形)―(2 辺共有の三角形)

問題番号 61　実際に，5 本の平行線とそれらに交わる 4 本の平行線をかいてから、考えてみよう。平行四辺形ができるためには，どのような 4 本の直線を選べばよいか考えるのがポイントでしょう。

問題番号 62　「特定の○○」という，聞きなれない言葉遣いです。この言葉遣いに慣れるだけの問題かな。

問題番号 64　教科書 p.32 応用例題６の派生問題です。

(1) は，分けるグループに名前がついていなくても個数がすべて異なっているので，グループに名前がついているのと同じことなので，1 グループずつ順に分ければよい。

(2) は，分ける個数は同じであるが，グループに名前がついているので区別できる。

(3) は，分ける個数が同じで，グループに名前がついていないので，グループに名前を付けて考えてから，その名前を外せばよい。

(4) は，(3) と同じようにグループにまず名前を付けて数えてから，名前を取ると区別できないグループ数の階乗で割って減らしてやればよい。

問題番号 65　S，R を □ 2 個と考えてみよう。S と R は，異なる文字なので区別できるが，あえて同じ文字 □ と考えて並べてから，最後に S，R を順に□の代わりに入れれば，必ず問題の指定通りの並べ方になる。なかなか面白い発想の転換である。