

今週の数学の学習ポイント 5 5月第4週

こんにちは。**数学Ⅰは第18回くらいまで、数学Aは第12回くらいまで**のポイントです。

教科書の本文、例、例題、応用例題を理解したら、完成ノートの問題に取り組んでください。

(注 教科書の練習、補充問題、章末問題は取り組まなくてよいです。)

過去の取り組みで詰まっているところがあると思いますので、「3 TRIAL 完成ノートポイント解説」をよく読んで復習もしておいてください。**「1歩進んで、振り返る」**前回の復習をしつつ、**次のステップに進みましょう。**

	数Ⅰ	教科書の ページ数	完成ノートの 問題番号	数A	教科書の ページ数	完成ノートの 問題番号
5/18～	第16回	p.41, 42	69, 70, 72, 73, 74	第11回	p.28, 29, 30	51, 52
	第17回	p.43 応用例題 6	75, 76, 77, 78	第12回	p.31, 32	53, 54, 57, 58, 59, 63
	第18回	p.44, 45	79～84の6題			

『数学Ⅰ』 第16回 (教科書 p.41, 42 3 TRIAL 問題番号 69, 70, 72, 73, 74)

連立不等式

いくつかの不等式を組み合わせたもの。

連立不等式の解

1つひとつの不等式の解の**共通範囲**。**共通範囲がないとき**もあり、そのときは「**解なし**」というのが答えとなる。

連立不等式の表記

1つひとつを $\left\{ \begin{array}{l} 5x+3>3x+1 \\ -x+4\geq 2(x-1) \end{array} \right.$ でセットにする。 **例題 10**

1つの式の中に、2つ以上の同じ向きの不等号を用いて表す。 **例題 11 (1)** $0<x<10-x$

この **例題 11 (1)** $0<x<10-x$ は $\begin{cases} x>0 \\ x<10-x \end{cases}$ のことである。

『数学Ⅰ』 第17回 (教科書 p.43 応用例題 6 3 TRIAL 問題番号 75, 76, 77, 78)

文章題の解き方

何を x とするかをまず決めて、問題文に提示された条件を x の式で表す。

必ずしも、求めるものを x とする必要はない。解きやすい式を作ることが大切である。

「以上」や「以下」など「以」が使われているときは、等号付きの不等号 ($\leq$ や $\geq$) を用いる。

「未満」や「より大きい」などが使われているときは、等号なしの不等号 ($<$ や $>$) を用いる。

『数学Ⅰ』 第18回 (教科書 p.44, 45 3 TRIAL 問題番号 79, 80, 81, 82, 83, 84)

絶対値を含む方程式と不等式

基本的には、教科書 p.44 の **例 30** の3つの型を理解する。

方程式 $|x| = \bigcirc$ の解は、 $x = \pm \bigcirc$

不等式 $|x| < \bigcirc$ の解は、 $-\bigcirc < x < \bigcirc$ $|x| \leq \bigcirc$ の解は、 $-\bigcirc \leq x \leq \bigcirc$

$|x| > \bigcirc$ の解は、 $x < -\bigcirc, \bigcirc < x$ $|x| \geq \bigcirc$ の解は、 $x \leq -\bigcirc, \bigcirc \leq x$

を意味している。あとは、上の解答の型を、**数直線をイメージしながら**、覚えればよい。

教科書 p.45 の **例題 12 (1)** $|x-2|=3$ **解答** について

解答 $x-2=\pm 3$ $\leftarrow \underline{x-2=3 \text{ と } x-2=-3 \text{ を一挙に書いたもの}}$

よって、 $x=5, -1$ $\leftarrow \underline{x=5, x=-1 \text{ と同じ意味}}$

教科書 p.45 の **研究** のように、場合分けしながら絶対値記号を外して単なる 1 次方程式（1 次不等式）にして解いてもよい。

例 $|x-4|=-3x \cdots ①$ を解け。

解答 [1] $x-4 \geq 0$ のとき すなわち $x \geq 4$ のとき ← 絶対値記号を外すための場合分けです。

$$|x-4|=-3x$$

$$x-4=-3x$$

$$x+3x=4$$

$$4x=4$$

$$x=1$$

絶対値記号の中身が [1] 0 以上 か [2] 0 未満 かで、外し方が変わるからです。

[1] x が 4 以上の範囲に限定して答えを探し始めます。

これは、 $x \geq 4$ の範囲にないので、解ではない。

[2] $x-4 < 0$ のとき すなわち $x < 4$ のとき ← [2] x が 4 未満の範囲に限定して答えを探し始めます。

$$|x-4|=-3x$$

$$-(x-4)=-3x$$

$$-x+3x=-4$$

$$2x=-4$$

$$x=-2$$

これは、 $x < 4$ の範囲なので、解である。

[1], [2] より、① の解は $x=-2$ ㊟

例 $|x-4|<-3x \cdots ②$ を解け。

解答 [1] $x-4 \geq 0$ のとき すなわち $x \geq 4$ のとき ← 絶対値記号を外すための場合分けです。

$$|x-4|<-3x$$

$$x-4<-3x$$

$$x+3x<4$$

$$4x<4$$

$$x<1$$

絶対値記号の中身が [1] 0 以上 か [2] 0 未満 かで、外し方が変わるからです。

[1] x が 4 以上の範囲に限定して答えを探し始めます。

いま、 $x \geq 4$ の範囲で考えているので、 $x < 1$ との共通範囲はない。よって、解はない。

[2] $x-4 < 0$ のとき すなわち $x < 4$ のとき ← [2] x が 4 未満の範囲に限定して答えを探し始めます。

$$|x-4|<-3x$$

$$-(x-4)<-3x$$

$$-x+3x<-4$$

$$2x<-4$$

$$x<-2$$

いま、 $x < 4$ の範囲で考えているので、 $x < -2$ との共通範囲は、 $x < -2$ である。

[1], [2] より、② の解は $x < -2$ ㊟

『数学A』 第11回 (教科書 p.28 ~ 30 3 TRIAL 問題番号 51, 52)

組合せ

ものを取り出す順序を無視し、中身の違いにだけ着目した組 1 つひとつのこと。

順列との違い

順列 選んで並べた 1 つひとつの並べ方

組合せ 選んだものの組 1 つひとつ

つまり, $\text{選ぶ} = \text{組合せ}$

$\text{選び並べる} = \text{順列}$

である。

この考え方に着目して、 組合せの総数 の計算の仕方を考え出した。

例 4 個の文字 a, b, c, d から、異なる 3 個取り出す組合せの総数

考え方 4 個から 3 個取る順列の総数 (4 個から 3 個選び並べる方法の総数) は

4 個から 3 個取る順列の総数 = 4 個から 3 個選ぶ組合せの総数 $\times$ その 3 個の並べ方の総数

であることから、

4 個から 3 個選ぶ組合せの総数 = 4 個から 3 個取る順列の総数 $\div$ その 3 個の並べ方の総数

と変形して、「組合せの総数」を「順列の総数」を使って求める。

具体的には

4 個から 3 個取る順列の総数 = 4 個から 3 個選ぶ組合せの総数 $\times$ その 3 個の並べ方の総数

$$\begin{aligned} 4 \text{ 個から } 3 \text{ 個選ぶ組合せの総数} &= \frac{4 \text{ 個から } 3 \text{ 個取る順列の総数}}{\text{その } 3 \text{ 個の並べ方の総数}} \\ &= \frac{{}_4P_3}{3!} \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{6} \\ &= 4 (\text{通り}) \quad \text{答} \end{aligned}$$

組合せの総数の公式

$$\text{公式} \quad n \text{ 個から } r \text{ 個選ぶ組合せの総数} = \frac{n \text{ 個から } r \text{ 個取る順列の総数}}{r \text{ 個の並べ方の総数}}$$

組合せの総数を表す記号

異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶ組合せ

を略して

n 個から r 個取る組合せ

ということにします。そして、その言葉に対応した記号を

${}_nC_r$

と表すことにします。(組合せ = Combination であるから、その頭文字を使っています)

$$\text{組合せの総数の公式} \quad \text{公式} \quad {}nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

となるのです。

${}_nC_r$ の性質

例えば、教科書 p.30 にある通り

5 個から 3 個選ぶ組合せの場合、選ぶ 3 個の陰には、選ばれない 2 個が存在しています。

ですので、

5 個から 3 個選ぶ組合せの総数 = 5 個から選ばれない 2 個を選ぶ組合せの総数

$${}_5C_3 = {}_5C_2$$

が成り立つのです。

これを利用すれば、

$${}_{10}C_7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}}{\cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

と計算する代わりに、

$${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

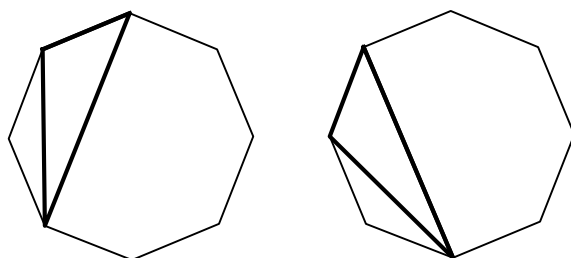
と比較的少ない計算で済むようになります。

『数学 A』 第 8 回 (教科書 p.31, 32 3 TRIAL 問題番号 53, 54, 57, 58, 59, 63)

教科書 p.31 組合せの考え方の利用

例題 6 正八角形の 8 個の頂点のうち、3 点を結んで三角形を作るとき、三角形は何個作れるか。

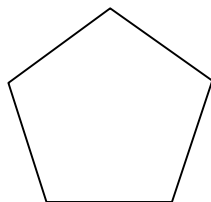
考察 この問題では、例えば



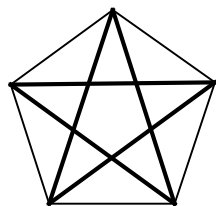
同じ形の三角形でも、上記 2 つは異なる三角形と考えて数えることにしている。

回転させると一致してしまうので、何となく上記 2 つの三角形は、1 つと数えてしまいたくなるが、そこは暗黙の了解 (言葉にしなくても皆が了解している事項) ということなのだろう。小学生か中学生のころ次のような問題を考えたことはなかっただろうか。

例 正五角形には、何本の対角線があるか。



実際に、書き込んで数えたのではないだろうか。



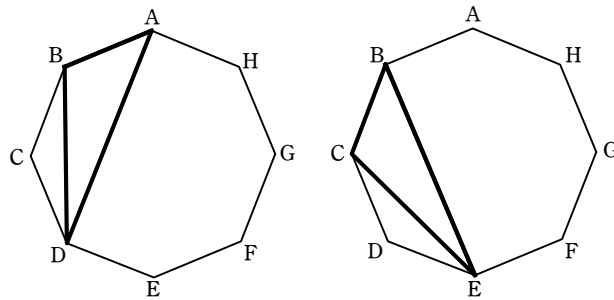
答え 5 本

のように。このとき、この対角線 1 本 1 本は、正五角形の中心で回転させれば、すべて重なってしまう。だけれども対角線の本数を数えるときは、異なる対角線と認識していたのではないか。だから、**例題 6** は、それと同じなのである。

では、**例題 6** はどのように考えるか。地道に書き込んで数える方法は、最終手段にとっておこう。

まず、8 個の頂点に A, B, C, …… , H と便宜的に名前を付けておく。(名前を付けろとは問題のどこにも書いていないが、名前を付けるとわかりやすくなる。)

考察 この問題では、例えば



すると、先ほどの三角形も、左は $\triangle ABD$ 右は $\triangle BCE$ と表せわかりやすい。

さらに、 $\triangle ABD = \triangle ADB = \triangle BAD = \triangle BDA = \triangle DAB = \triangle DBA$ であるから $\triangle ABD$ だけを考えればよい。つまり、A, B, D 3 文字の順列ではなく、選ぶだけの組合せが適していることも考え合わせると、この問題での

正八角形の 8 個の頂点のうち、3 点結んでできる三角形の個数 は、

8 個の文字 A, B, C, …… , H から異なる 3 文字を選ぶ組合せの総数

と考えることができるのである。

ちなみに、正八角形の対角線の本数も数えてみる。

8 個の文字 A, B, C, …… , H から異なる 2 文字を選ぶ組合せの総数

だと、線分 AB や線分 AH など、正八角形の辺も数えてしまうことになる。対角線は、これら辺を含まない。

だから、**対角線の本数 = 線分の本数 - 辺の数** という等式で求めるのである。

先ほどの、正五角形の場合

$$\begin{aligned}\text{正五角形の対角線の本数} &= {}_5C_2 - 5 \\ &= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} - 5 \\ &= 5 \text{ (本) } \quad \square\end{aligned}$$

と計算で求まるのである。

教科書 p.32 組分けの問題

応用例題 6 6 人を次のように分けるとき、分け方は何通りあるか。

- (1) A, B, C の 3 つの部屋に、2 人ずつ分ける。
- (2) 2 人ずつ 3 つの組に分ける。

考え方 まず、6 人に便宜的に名前を付ける。a, b, c, d, e, f としよう。

- (1) は、部屋には名前が付いているので区別するが、
- (2) は、3 つの組に名前は特になく、単に 2 人ペアを 3 つ作ればよい。

ここで、(1) の解答は

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 90 \text{ (通り)}$$

となる理由を説明する。

最初の ${}_6C_2$ は、部屋 A に入れる 2 人の選び方を表している。

次の $\times_4 C_2$ は、部屋 A の選び方に続けて、残り 4 人から部屋 B に入れる 2 人の選び方を表している。

続けて選んでいるので、積の法則を使っているのである。教科書は、ここで立式が終わっている。なぜならば、この時点で、残された 2 人は、部屋 C に入ることは自動的に 1 通りに決まるので、 $\times_2 C_2$ は $\times 1$ のことから、省略しているのである。

$$\text{では、(2) で } {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 90 \text{ (通り)}$$

とするのはなぜダメなのだろうか。

それは、 ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2$ という掛け算「 $\times$ 」を用いた計算は、積の法則を表していると同時に、2 人組の選び方に、

グループ A の 2 人 $\rightarrow$ グループ B の 2 人 $\rightarrow$ グループ C の 2 人

という風に、グループに名前を付けて区別して数えているのと同じなのです。名前を付けるつもりがなくても自動的に名前が付いてしまう数え方なのです。

例えば、1, 2, 3, 4 の 4 つの数字で、4 桁の自然数は何個できるか？と問われたら、

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ (個)}$$

と答えますよね。このとき、最初の 4 は、千の位の選び方。 $\times 3$ は、引き続き百の位の選び方という意味が自動的に込められているのと同じなのです。

(ちなみに、人によっては、最初の 4 には、一の位の選び方。 $\times 3$ は、引き続き十の位の選び方という風に考える人がいると思います。それはそれで問題ないのです。どこから場合の数を数えようとそれは自由で、答は一致します。)

このように $\bigcirc \times \triangle \times \square$ という掛け算「 $\times$ 」を用いた計算には、名前がつくなど区別している計算であることがお判りいただけたでしょうか。

ですので、(2) の計算は、組合せの計算と同じで、区別を取るために「割って減らす」のです。

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = \frac{\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 \text{ (通り)}$$