３ＴＲＩＡＬ　完成ノート　ポイント解説②　数学Ⅰ　　第１章　数と式
第２節　実　数　　第３節　１次不等式（連立不等式の手前まで）

40

次の分数を小数で表せ。循環小数は，$0.\dot{6}$ のような表し方で書け。

(1) $\dfrac{2}{5}$　(2) $\dfrac{5}{9}$　(3) $\dfrac{2}{11}$　(4) $\dfrac{7}{8}$　(5) $\dfrac{4}{3}$　(6) $\dfrac{19}{6}$

(1) $\dfrac{2}{5}=0.4$　(2) $\dfrac{5}{9}=0.555\cdots\cdots=0.\dot{5}$　(3) $\dfrac{2}{11}=0.181818\cdots\cdots=0.\dot{1}\dot{8}$

(4) $\dfrac{7}{8}=0.875$　(5) $\dfrac{4}{3}=1.333\cdots\cdots=1.\dot{3}$　(6) $\dfrac{19}{6}=3.1666\cdots\cdots=3.1\dot{6}$

41

-2，0，$\dfrac{21}{7}$，$-\dfrac{9}{8}$，$\sqrt{2}$，5，$\dfrac{2}{9}$，0.12，π，$0.\dot{8}$ の中から，次のものを選び出せ。ただし，π は円周率である。

(1)　自然数　(2)　整数　(3)　有理数　(4)　無理数

(1)　自然数は　$\dfrac{21}{7}$，5　(2)　整数は　-2，0，$\dfrac{21}{7}$，5

(3)　有理数は　-2，0，$\dfrac{21}{7}$，$-\dfrac{9}{8}$，5，$\dfrac{2}{9}$，0.12，$0.\dot{8}$　(4)　無理数は　$\sqrt{2}$，π

参考　$\dfrac{21}{7}=3$ は整数であり，自然数でもある。また，有限小数 0.12 は　$0.12=\dfrac{12}{100}=\dfrac{3}{25}$，循環小数 $0.\dot{8}$ は　$0.\dot{8}=\dfrac{8}{9}$
のように分数で表すことができる。すなわち，0.12，$0.\dot{8}$ は有理数である。

42

次の中から正しいものをすべて選べ。

① ２つの自然数の和，差は常に自然数である。
② ２つの整数の和，差，積，商は常に整数である。
③ ２つの有理数の和，差，積，商は常に有理数である。
④ ２つの実数の和，差，積，商は常に実数である。

正しいものは　③，④

参考　① が正しくない例：$1-2=-1$　（2 つの自然数の差は，自然数とは限らない。）
　② が正しくない例：$1\div 2=0.5$　（2 つの整数の商は，整数とは限らない。）

43

次の値を求めよ。ただし，π は円周率である。

(1) $|5|$　(2) $|-1|$　(3) $|-2.5|$　(4) $\left|\dfrac{1}{3}\right|$　(5) $|-5+2|$

(6) $|2|-|-7|$　(7) $\left|-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right|$　(8) $|2-\sqrt{2}|$　(9) $|\pi-3|+|\pi-4|$

(1) $|5|=5$　(2) $|-1|=1$　(3) $|-2.5|=2.5$　(4) $\left|\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$　(5) $|-5+2|=|-3|=3$

(6) $|2|-|-7|=2-7=-5$　(7) $\left|-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{-1-2+3}{6}\right|=|0|=0$

(8) $2-\sqrt{2}>0$ であるから　$|2-\sqrt{2}|=2-\sqrt{2}$

(9) $\pi-3>0$，$\pi-4<0$ であるから　$|\pi-3|+|\pi-4|=\pi-3-(\pi-4)=\pi-3-\pi+4=1$

解説　絶対値記号の外し方　|中身|
中身が正または 0 のとき，そのまま外す。
中身が負のとき，-1 を掛けて外す。

44

> 次の循環小数を分数で表せ。
>
> (1)　$0.\dot{4}$　　(2)　$0.\dot{7}\dot{9}$　　(3)　$0.2\dot{2}\dot{7}$　　(4)　$1.\dot{3}0\dot{6}$

(1)　$0.\dot{4}=0.444\cdots\cdots$

$x=0.444\cdots\cdots$ とすると　　$10x=4.444\cdots\cdots$

よって　　$10x-x=4$

$9x=4$

したがって　　$x=\dfrac{4}{9}$

$$\begin{array}{rr} & 10x=4.444\cdots\cdots \\ - & x=0.444\cdots\cdots \\ \hline & 9x=4 \end{array}$$

(2)　$0.\dot{7}\dot{9}=0.797979\cdots\cdots$

$x=0.797979\cdots\cdots$ とすると　　$100x=79.7979\cdots\cdots$

よって　　$100x-x=79$

$99x=79$

したがって　　$x=\dfrac{79}{99}$

$$\begin{array}{rr} & 100x=79.797979\cdots\cdots \\ - & x=0.797979\cdots\cdots \\ \hline & 99x=79 \end{array}$$

(3)　$0.2\dot{2}\dot{7}=0.2272727\cdots\cdots$

$x=0.2272727\cdots\cdots$ とすると

$10x=\quad 2.272727\cdots\cdots$

$1000x=227.272727\cdots\cdots$

よって　　$1000x-10x=225$

$990x=225$

したがって　　$x=\dfrac{225}{990}=\dfrac{5}{22}$

$$\begin{array}{rr} & 1000x=227.272727\cdots\cdots \\ - & 10x=\quad 2.272727\cdots\cdots \\ \hline & 990x=225 \end{array}$$

解説　循環している部分 272727が，上手に消えるように，(1)，(2) よりも工夫が必要である。

(4)　$1.\dot{3}0\dot{6}=1.306306306\cdots\cdots$

$x=1.306306306\cdots\cdots$ とすると

$1000x=1306.306306\cdots\cdots$

よって　　$1000x-x=1305$

$999x=1305$

したがって　　$x=\dfrac{1305}{999}=\dfrac{145}{111}$

$$\begin{array}{rr} & 1000x=1306.306306306\cdots\cdots \\ - & x=\quad 1.306306306\cdots\cdots \\ \hline & 999x=1305 \end{array}$$

45

> 次の実数を小さい順に並べよ。ただし，π は円周率である。
>
> $$0,\ -2,\ 5,\ \frac{8}{3},\ -\frac{9}{8},\ \sqrt{5},\ 2.7,\ \pi,\ -\sqrt{3},\ 2.\dot{3}$$

$\dfrac{8}{3}=2.66\cdots\cdots$，　　$-\dfrac{9}{8}=-1.125$，

$\sqrt{5}=2.23\cdots\cdots$，　　$\pi=3.14\cdots\cdots$，

$-\sqrt{3}=-1.73\cdots\cdots$，　　$2.\dot{3}=2.33\cdots\cdots$

よって，小さい順に並べると

$$-2,\ -\sqrt{3},\ -\frac{9}{8},\ 0,\ \sqrt{5},\ 2.\dot{3},\ \frac{8}{3},\ 2.7,\ \pi,\ 5$$

解説　数直線に書き込んでいくと，より分かりやすくなるでしょう。

46

$a=-8$，1，4 のそれぞれについて，次の式の値を求めよ。

(1) $|a+5|+|a-2|$　　(2) $|1-a|-|2a+7|$

(1) $a=-8$ のとき　$|-8+5|+|-8-2|=|-3|+|-10|=3+10=13$

$a=1$ のとき　$|1+5|+|1-2|=|6|+|-1|=6+1=7$

$a=4$ のとき　$|4+5|+|4-2|=|9|+|2|=9+2=11$

(2) $a=-8$ のとき　$|1-(-8)|-|2\cdot(-8)+7|=|9|-|-9|=9-9=0$

$a=1$ のとき　$|1-1|-|2\cdot 1+7|=|0|-|9|=0-9=-9$

$a=4$ のとき　$|1-4|-|2\cdot 4+7|=|-3|-|15|=3-15=-12$

解説 絶対値記号の中は，いつも通りの計算をすることができますが，絶対値記号を超えての計算は，記号を外さないとできません。ですので，絶対値記号の中身が正なのか負なのかをはっきりさせてから外すようにしましょう。

47

次の問いに答えよ。

(1) 5 の平方根は何か。

(2) 23 の平方根は何か。

(3) $\sqrt{36}$，$-\sqrt{\dfrac{25}{64}}$ の値を，それぞれ求めよ。

(4) $(\sqrt{7})^2$，$(-\sqrt{7})^2$，$\sqrt{7^2}$，$-\sqrt{7^2}$，$\sqrt{(-7)^2}$ の値を，それぞれ求めよ。

(1) 5 の平方根は 2 乗すると 5 になる数であるから　$\pm\sqrt{5}$

(2) 23 の平方根は 2 乗すると 23 になる数であるから　$\pm\sqrt{23}$

(3) $\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$，　$-\sqrt{\dfrac{25}{64}}=-\sqrt{\left(\dfrac{5}{8}\right)^2}=-\dfrac{5}{8}$

(4) 7 の平方根 $\pm\sqrt{7}$ は 2 乗すると 7 になる数であるから

$(\sqrt{7})^2=7$，$(-\sqrt{7})^2=7$

また　$\sqrt{7^2}=7$，$-\sqrt{7^2}=-7$

$(-7)^2=49=7^2$ であるから　$\sqrt{(-7)^2}=\sqrt{7^2}=7$

解説 (4) いろいろな形で聞いて，$\sqrt{\ }$ の理解を確かめているのである。落ち着いて計算すれば，当たり前だと思えるでしょう。

48

次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt{2}\sqrt{7}$　　(2) $\sqrt{3}\sqrt{11}$　　(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

(1) $\sqrt{2}\sqrt{7}=\sqrt{2\times 7}=\sqrt{14}$　　(2) $\sqrt{3}\sqrt{11}=\sqrt{3\times 11}=\sqrt{33}$

(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{6}{2}}=\sqrt{3}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{27}{3}}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

49

次の式を $\sqrt{a}$ の形に表せ。

(1) $3\sqrt{7}$　　(2) $2\sqrt{11}$　　(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　(4) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(1) $3\sqrt{7}=\sqrt{3^2}\sqrt{7}=\sqrt{3^2\times 7}=\sqrt{63}$　　(2) $2\sqrt{11}=\sqrt{2^2}\sqrt{11}=\sqrt{2^2\times 11}=\sqrt{44}$

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}}=\sqrt{\dfrac{2}{3^2}}=\sqrt{\dfrac{2}{9}}$　　(4) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2^2}{3}}=\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

50

次の式を $k\sqrt{a}$ の形に表せ。

(1) $\sqrt{18}$　(2) $\sqrt{20}$　(3) $\sqrt{28}$　(4) $\sqrt{75}$

(1) $\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{3^2}\sqrt{2}=3\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{20}=\sqrt{2^2\times 5}=\sqrt{2^2}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{28}=\sqrt{2^2\times 7}=\sqrt{2^2}\sqrt{7}=2\sqrt{7}$　(4) $\sqrt{75}=\sqrt{5^2\times 3}=\sqrt{5^2}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

51

次の式を計算せよ。

(1) $5\sqrt{2}-\sqrt{2}$　(2) $4\sqrt{3}-7\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{18}+\sqrt{32}$　(4) $5\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{48}$

(5) $(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-3\sqrt{3})$　(6) $(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})-(\sqrt{48}-\sqrt{45})$

(1) (与式)$=(5-1)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

(2) (与式)$=(4-7+2)\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

(3) (与式)$=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=(3+4)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

(4) (与式)$=5\sqrt{3}+5\sqrt{3}-4\sqrt{3}=(5+5-4)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

(5) (与式)$=(3+1)\sqrt{2}+(-5-3)\sqrt{3}=4\sqrt{2}-8\sqrt{3}$

(6) (与式)$=(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})-(4\sqrt{3}-3\sqrt{5})=(3-4)\sqrt{3}+(-2+3)\sqrt{5}=-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

解説　例えば，$2+3$　は計算できるのに，

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ はこれ以上計算できないということはよろしいですね。

$\sqrt{2}$　+　$\sqrt{3}$　$=\sqrt{5}$　が成り立たないのは

$1.4142\cdots+1.7320\cdots=2.2360\cdots$ という計算が成り立たないからです。

左辺は，3をかるく超えていますね。

52

次の式を計算せよ。

(1) $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{27}\times\sqrt{12}$

(3) $\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{15}$　(4) $\sqrt{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$

(5) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{6})\sqrt{6}$　(6) $(4\sqrt{2}+\sqrt{7})(3\sqrt{2}-2\sqrt{7})$

(7) $(3\sqrt{3}-2\sqrt{6})(\sqrt{3}-2\sqrt{6})$

(1) (与式)$=3\times 2\times(\sqrt{2}\times\sqrt{5})=6\sqrt{10}$

(2) (与式)$=\sqrt{3^2\times 3}\times\sqrt{2^2\times 3}=3\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=6\times(\sqrt{3})^2=6\times 3=18$

(3) (与式)$=\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3\times 5}$

$=(\sqrt{5})^2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=5\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=5\sqrt{6}$

(4) (与式)$=\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{5}=2\times 3-\sqrt{15}=6-\sqrt{15}$

(5) (与式)$=3\sqrt{2}\times\sqrt{6}-2\sqrt{6}\times\sqrt{6}$

$=3\times 2\sqrt{3}-2\times 6=6\sqrt{3}-12$

(6) (与式)$=4\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}-4\sqrt{2}\times 2\sqrt{7}+\sqrt{7}\times 3\sqrt{2}-\sqrt{7}\times 2\sqrt{7}$

$=12\times 2-8\sqrt{14}+3\sqrt{14}-2\times 7$

$=(24-14)+(-8+3)\sqrt{14}$

$=10-5\sqrt{14}$

(7) (与式)$=3\sqrt{3}\times\sqrt{3}-3\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}-2\sqrt{6}\times\sqrt{3}+2\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}$

$=3\times 3-6\times 3\sqrt{2}-2\times 3\sqrt{2}+4\times 6$

$=9-18\sqrt{2}-6\sqrt{2}+24$

$=(9+24)+(-18-6)\sqrt{2}$

$=33-24\sqrt{2}$

解説　例えば，$2\times 3=6$

$2\div 3=\dfrac{2}{3}$ ですね。

一方，掛け算・割り算については

$\sqrt{\ }$ でも，この計算ができます。

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

$\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

足し算や引き算では，$\sqrt{\ }$ の中身が異なれば，計算がストップするのは，上の問題で解説した通りです。

なぜ，掛け算と割り算では，計算がストップしないのでしょう。

53

次の式を計算せよ。

(1) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$　　(2) $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$　　(4) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

(5) $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$　　(6) $(2\sqrt{6}+3\sqrt{2})(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})$

(1) (与式)$=(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$

$=5+2\sqrt{10}+2=7+2\sqrt{10}$

(2) (与式)$=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2$

$=3-6\sqrt{6}+9\times 2=21-6\sqrt{6}$

(3) (与式)$=(\sqrt{6})^2-2\sqrt{6}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=6-2\times 3\sqrt{2}+3=9-6\sqrt{2}$

(4) (与式)$=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2=7-5=2$

(5) (与式)$=4^2-(\sqrt{3})^2=16-3=13$

(6) (与式)$=(2\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2})^2=24-18=6$

解説

(1)　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2)，(3)　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(4)，(5)，(6)　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

の展開の公式を，使っていますね。

$\sqrt{\ }$ は，文字式の計算と同じ感覚でできるのです。

54

次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$　　(2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$　　(3) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

(1) (与式)$=\dfrac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

(2) (与式)$=\dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

(3) (与式)$=\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

(4) (与式)$=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

55

次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$　　(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

(4) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}$　　(5) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$　　(6) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

(1) (与式)$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

(2) (与式)$=\dfrac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}+3$

(3) (与式)$=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$

$=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{30}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{30}}{2-6}=-\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{30}}{4}$

(4) (与式)$=\dfrac{2\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$

$=\dfrac{6\sqrt{2}+2\sqrt{10}}{3^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{6\sqrt{2}+2\sqrt{10}}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$

解説

分母が多項式のときの，有理化ですね。「学習のポイント３」で詳しく解説してあります。ポイントは和と差の積を使うことでしたね。

(5) (与式) $=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=\dfrac{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1^2}{(\sqrt{2})^2-1^2}$

$=2+2\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$

(6) (与式) $=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{(\sqrt{6})^2-2\sqrt{6}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{6-2\times2\sqrt{3}+2}{4}=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$

56

次の x の値に対して，$\sqrt{(x-2)^2}$ の値をそれぞれ求めよ。

(1) $x=4$　　(2) $x=2$　　(3) $x=1$

(1) $\sqrt{(4-2)^2}=\sqrt{2^2}=2$　　(2) $\sqrt{(2-2)^2}=\sqrt{0^2}=0$　　(3) $\sqrt{(1-2)^2}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1$

57

次の計算をせよ。

(1) $(\sqrt{54}+\sqrt{28})-(\sqrt{63}-\sqrt{96})$　　(2) $(\sqrt{18}+\sqrt{24})^2$

(3) $\sqrt{5}(\sqrt{40}-\sqrt{20})$　　(4) $(\sqrt{12}-\sqrt{125})(\sqrt{48}-\sqrt{5})$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{20}}-\dfrac{1}{\sqrt{45}}$　　(6) $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(7) $\dfrac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+1}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-3}$　　(8) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$

(1) (与式) $=(\sqrt{3^2\times6}+\sqrt{2^2\times7})-(\sqrt{3^2\times7}-\sqrt{4^2\times6})$

$=3\sqrt{6}+2\sqrt{7}-3\sqrt{7}+4\sqrt{6}$

$=7\sqrt{6}-\sqrt{7}$

(2) (与式) $=(\sqrt{18})^2+2\sqrt{18}\sqrt{24}+(\sqrt{24})^2$

$=18+2\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}+24$

$=42+12\times2\sqrt{3}$

$=42+24\sqrt{3}$

(3) (与式) $=\sqrt{5}\sqrt{40}-\sqrt{5}\sqrt{20}$

$=\sqrt{5\times(2^3\times5)}-\sqrt{5\times(2^2\times5)}$

$=5\times2\sqrt{2}-5\times2$

$=10\sqrt{2}-10$

(4) (与式) $=(\sqrt{2^2\times3}-\sqrt{5^3})(\sqrt{4^2\times3}-\sqrt{5})$

$=(2\sqrt{3}-5\sqrt{5})(4\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$=2\sqrt{3}\times4\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{5}-5\sqrt{5}\times4\sqrt{3}+5\sqrt{5}\sqrt{5}$

$=8\times3-2\sqrt{15}-20\sqrt{15}+5\times5$

$=(24+25)+(-2-20)\sqrt{15}$

$=49-22\sqrt{15}$

(5)　$(\text{与式})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5}}-\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$

$$=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{15}$$

$$=\frac{6\sqrt{5}-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{30}=\frac{\sqrt{5}}{30}$$

(6)　$(\text{与式})=\dfrac{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$(\text{分母})=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$

$=4\times3-2=10$

$(\text{分子})=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{2}$

$=2\times3+\sqrt{6}+4\sqrt{6}+2\times2$

$=10+5\sqrt{6}$

よって　$(\text{与式})=\dfrac{10+5\sqrt{6}}{10}=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

解説

(6)　$\dfrac{10+5\sqrt{6}}{10}$ の約分について

分数の約分は，積の形にして行うのが，原則です。わからなくなったら，下のようにやれば大丈夫です。

$$\frac{10+5\sqrt{6}}{10}=\frac{5(2+\sqrt{6})}{5\cdot2}$$

$$=\frac{\cancel{5}^{1}(2+\sqrt{6})}{\cancel{5}^{1}\cdot2}$$

$$=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$$

(7)　$(\text{与式})=\dfrac{(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}-\dfrac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+3)}{(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)}$

$$=\frac{(\sqrt{5})^2+(-3-1)\sqrt{5}+(-3)\cdot(-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}-\frac{(\sqrt{5})^2+(1+3)\sqrt{5}+1\cdot3}{(\sqrt{5})^2-3^2}$$

$$=\frac{8-4\sqrt{5}}{4}-\frac{8+4\sqrt{5}}{-4}$$

$$=2-\sqrt{5}+(2+\sqrt{5})=4$$

(8)　$(\text{与式})=\dfrac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+\dfrac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}+\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3})^2-2^2}$$

$$=-(1+\sqrt{2})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{3}+2)=-3$$

58

$x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+y$　　(2)　xy　　(3)　x^2+y^2　　(4)　x^3y+xy^3　　(5)　x^3+y^3　　(6)　$x^5y^2+x^2y^5$

(1)　$x+y=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

(2)　$xy=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}{2^2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

(3)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{7})^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=7-1=6$

(4)　$x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)=\dfrac{1}{2}\cdot6=3$

(5)　$x^3+y^3=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}=\sqrt{7}\cdot\left(6-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11\sqrt{7}}{2}$

(6)　$x^5y^2+x^2y^5=x^2y^2(x^3+y^3)=(xy)^2(x^3+y^3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{11\sqrt{7}}{2}=\dfrac{11\sqrt{7}}{8}$

公式

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

別解　(5)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(\sqrt{7})^3-3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{7}$

$=7\sqrt{7}-\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$

$=\left(7-\dfrac{3}{2}\right)\sqrt{7}$

$=\dfrac{11}{2}\sqrt{7}$

59

$\sqrt{2}$ の値として 1.4142，$\sqrt{3}$ の値として 1.7321 を使うとき，分母の有理化を利用して，次の値を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$　(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1.4142}{2}=0.7071$

(2) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1^2}=3-\sqrt{3}=3-1.7321=1.2679$

(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{-1}$

$=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=3\times1.4142-2\times1.7321=4.2426-3.4642=0.7784$

60

$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする。

(1) a と b を求めよ。　(2) $a+2b+b^2+1$ の値を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$

$\sqrt{3}=1.73\cdots\cdots$ であるから　$2+\sqrt{3}=3.73\cdots\cdots$

よって　$a=3$,

$b=(2+\sqrt{3})-a$

$=(2+\sqrt{3})-3$

$=\sqrt{3}-1$

(2) $a+2b+b^2+1=3+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2+1$

$=3+2\sqrt{3}-2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2+1=6$

別解　$a+2b+b^2+1=a+(b+1)^2$

$=3+\{(\sqrt{3}-1)+1\}^2$

$=3+(\sqrt{3})^2=6$

解説

整数部分は，おおよその数がわかるところまで，計算して求めます。

小数部分は，

元の数－整数部分

で，表現しないと正確には書き表すことができないことを覚えておいてください。

61

次の問いに答えよ。

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$ を計算せよ。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

(1) (与式)$=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$

$=\{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2\}-5$

$=(5+2\sqrt{6})-5=2\sqrt{6}$

(2) (1) の結果を利用すると

(与式)$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

解説

分母が 3 項の多項式のときの，有理化ですね。

(1) がヒントになっています。「学習のポイント３」で詳しく解説してあります。ポイントは 2項をひとまとまりで考えて「和と差の積」を使い，$\sqrt{\ }$ の数を 1 つ減らすことでしたね。

62

次の式を簡単にせよ。			
(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$	(2) $\sqrt{9+\sqrt{56}}$	(3) $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$	(4) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$

(1) (与式)$=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot 1}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}$

$=\sqrt{3}+1$

(2) (与式)$=\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{(7+2)+2\sqrt{7\cdot 2}}$

$=\sqrt{7}+\sqrt{2}$

(3) (与式)$=\sqrt{6-2\sqrt{8}}=\sqrt{(4+2)-2\sqrt{4\cdot 2}}$

$=\sqrt{4}-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$

(4) (与式)$=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(5+3)-2\sqrt{5\cdot 3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

解説 「学習のポイント４」をもう一度読んでみてください。

2重根号 $\sqrt{\bigcirc+2\sqrt{\square}}$ が1重根号の式に変形できるためには，

ある2つの数を用いて，□を積の形，

その2つの数を用いて，○を和の形

にできるそんな2つの数を発見できれば変形可能です。

$\sqrt{\bigcirc-2\sqrt{\square}}$ でも，同じです。

(4)が変形が一番難しいですね。一見，1重根号で表せないんじゃないかと思える形ですからね。

63

次の1次方程式を解け。		
(1) $2x-5=7$	(2) $-6x+3=4x-12$	(3) $3(2x+4)=5x$
(4) $0.9x+1=1.2x-2$	(5) $x=\dfrac{1}{2}x+1$	(6) $\dfrac{2}{3}x-1=\dfrac{x+1}{2}$

(1) 移項すると　$2x=7+5$

すなわち　$2x=12$

両辺を 2 で割って　$x=6$

(2) 移項すると　$-6x-4x=-12-3$

すなわち　$-10x=-15$

両辺を -10 で割って　$x=\dfrac{15}{10}=\dfrac{3}{2}$

(3) 左辺を展開すると　$6x+12=5x$

移項すると　$6x-5x=-12$

すなわち　$x=-12$

(4) 両辺に 10 を掛けて　$9x+10=12x-20$

移項すると　$9x-12x=-20-10$

すなわち　$-3x=-30$

両辺を -3 で割って　$x=10$

(5) 両辺に 2 を掛けて　$2x=x+2$

移項すると　$2x-x=2$

すなわち　$x=2$

(6) 両辺に 6 を掛けて　$4x-6=3(x+1)$

右辺を展開すると　$4x-6=3x+3$

移項すると　$4x-3x=3+6$

すなわち　$x=9$

64

次の数量の大小関係を不等式で表せ。
(1)　ある数 x を 2 で割って 3 を引いた数は x の 4 倍より大きい。
(2)　2 数 a，b の積は負で，かつ -3 以上である。
(3)　1 個 80 g の品物 x 個を 300 g のかご 1 つに全部入れたとき，全体の重さは 800 g 以下である。

(1)　$\frac{x}{2}-3>4x$　　(2)　$-3\leqq ab<0$　　(3)　$80x+300\leqq 800$

65

$a<b$ のとき，次の 2 数の大小を不等号 ＞ または ＜ で表せ。		
(1)　$a+3$，$b+3$	(2)　$a-4$，$b-4$	(3)　$5a$，$5b$
(4)　$-6a$，$-6b$	(5)　$\frac{a}{2}$，$\frac{b}{2}$	(6)　$\frac{a}{-5}$，$\frac{b}{-5}$
(7)　$2a-1$，$2b-1$	(8)　$1-a$，$1-b$	(9)　$-(a+1)$，$-(b+1)$

(1)　$a+3<b+3$　　(2)　$a-4<b-4$

(3)　$5a<5b$　　(4)　$-6a>-6b$

(5)　$\frac{a}{2}<\frac{b}{2}$　　(6)　$\frac{a}{-5}>\frac{b}{-5}$

(7)　$a<b$ の両辺に 2 を掛けると　　$2a<2b$

　さらに両辺から 1 を引くと　　$2a-1<2b-1$

解説　不等式のときは，負の数を掛けたり，負の数で割ったりすると，必ず不等号の向きを変えなければならない。鉄則です。呪文のように唱えてください。

「不等式は，両辺に負の数を掛けると，不等号の向きを変える」

「不等式は，両辺を負の数で割ると，不等号の向きを変える」

(8)　$a<b$ の両辺に -1 を掛けると，不等号の向きが変わるから　　$-a>-b$

　さらに両辺に 1 を足すと　　$1-a>1-b$

(9)　$a<b$ の両辺に 1 を足すと　$a+1<b+1$

　さらに両辺に -1 を掛けると，不等号の向きが変わるから　　$-(a+1)>-(b+1)$

66

次の不等式のうち，$x=4$ が解であるものを選べ。		
①　$2x+1<5$	②　$1-x<-2$	③　$-3x+5\geqq 0$

$x=4$ のときの左辺の値を調べる。

①　$2\cdot 4+1=9>5$

②　$1-4=-3<-2$

③　$-3\cdot 4+5=-7<0$

よって，① ～ ③ の不等式のうち $x=4$ が解であるものは　　②

次の 1 次不等式を解け。

(1) $8x-7<9$	(2) $2x+5>-1$	(3) $x-16 \geqq 5x$
(4) $-x+12 \leqq 2x$	(5) $7x+1 \leqq 2x+6$	(6) $4x-3 \geqq 2+3x$
(7) $6x-5>8x+13$	(8) $7+2x<5x-6$	(9) $2x+1 \geqq 4(x+3)$
(10) $3(2x+1)>x-2$	(11) $3(3x+1)<7(x-2)$	(12) $3x-4 \leqq 5(x+1)$

解説 1次不等式も1次方程式と同じように移項で解きます。
1次方程式と異なるのは，上の呪文のところです。
この 12 問で，もし間違った問題があったならば，なぜ間違ったのか，原因を突き止めておいてください。原因を突き止めておけば，経験が蓄積して，間違えにくくなったり，自分の間違える特徴を知ることができ，同じような場面に出会ったときに，「ここは要注意だ」と意識できるようになります。

(1) 移項し整理すると $8x<16$
両辺を 8 で割って $x<2$

(2) 移項し整理すると $2x>-6$
両辺を 2 で割って $x>-3$

(3) 移項し整理する $-4x \geqq 16$
両辺を -4 で割って $x \leqq -4$

(4) 移項し整理すると $-3x \leqq -12$
両辺を -3 で割って $x \geqq 4$ ←忘れず不等号の向きを変えましたか？

(5) 移項すると $7x-2x \leqq 6-1$
整理すると $5x \leqq 5$
両辺を 5 で割って $x \leqq 1$

(6) 移項すると $4x-3x \geqq 2+3$
整理すると $x \geqq 5$

(7) 移項すると $6x-8x>13+5$
整理すると $-2x>18$
両辺を -2 で割って $x<-9$ ←忘れず不等号の向きを変えましたか？

(8) 移項すると $2x-5x<-6-7$
整理すると $-3x<-13$
両辺を -3 で割って $x>\frac{13}{3}$ ←忘れず不等号の向きを変えましたか？

(9) 展開すると $2x+1 \geqq 4x+12$
移項し整理すると $-2x \geqq 11$
両辺を -2 で割って $x \leqq -\frac{11}{2}$ ←忘れず不等号の向きを変えましたか？

(10) 展開すると $6x+3>x-2$
移項し整理すると $5x>-5$
両辺を 5 で割って $x>-1$

(11) 展開すると $9x+3<7x-14$
移項し整理すると $2x<-17$
両辺を 2 で割って $x<-\frac{17}{2}$

(12) 展開すると $3x-4 \leqq 5x+5$
移項し整理すると $-2x \leqq 9$
両辺を -2 で割って $x \geqq -\frac{9}{2}$ ←忘れず不等号の向きを変えましたか？

次の 1 次不等式を解け。

(1) $\frac{1}{2}x > \frac{4}{5}x + 3$　　(2) $\frac{1-3x}{2} \leqq 3(1-2x)$

(3) $\frac{x-1}{2} < \frac{4x+5}{3}$　　(4) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \geqq \frac{1}{4}x - 1$

(5) $\frac{5}{8}x + \frac{1}{2} < x + \frac{3}{4}$　　(6) $\frac{x-6}{7} - \frac{x-5}{5} \leqq -1$

(7) $0.2x - 1 \geqq 0.4x - 1.5$　　(8) $0.2x - 0.09 > 0.06x - 0.3$

(1) 両辺に 10 を掛けると　$10 \times \frac{1}{2}x > 10\left(\frac{4}{5}x + 3\right)$

すなわち　$5x > 8x + 30$

移項して整理すると　$-3x > 30$

よって　$x < -10$　　← 忘れず不等号の向きを変えましたか？

(2) 両辺に 2 を掛けると　$2 \times \frac{1-3x}{2} \leqq 2 \times 3(1-2x)$

すなわち　$1 - 3x \leqq 6 - 12x$

移項して整理すると　$9x \leqq 5$

よって　$x \leqq \frac{5}{9}$

(3) 両辺に 6 を掛けると　$6 \times \frac{x-1}{2} < 6 \times \frac{4x+5}{3}$

すなわち　$3x - 3 < 8x + 10$

移項して整理すると　$-5x < 13$

よって　$x > -\frac{13}{5}$　　← 忘れず不等号の向きを変えましたか？

(4) 両辺に 12 を掛けると　$12\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\right) \geqq 12\left(\frac{1}{4}x - 1\right)$

すなわち　$8x - 2 \geqq 3x - 12$

移項して整理すると　$5x \geqq -10$

よって　$x \geqq -2$

(5) 両辺に 8 を掛けると　$8\left(\frac{5}{8}x + \frac{1}{2}\right) < 8\left(x + \frac{3}{4}\right)$

すなわち　$5x + 4 < 8x + 6$

移項して整理すると　$-3x < 2$

よって　$x > -\frac{2}{3}$　　← 忘れず不等号の向きを変えましたか？

(6) 両辺に 35 を掛けると　$35\left(\frac{x-6}{7} - \frac{x-5}{5}\right) \leqq -35$

すなわち　$5x - 30 - 7x + 35 \leqq -35$

移項して整理すると　$-2x \leqq -40$

よって　$x \geqq 20$　　← 忘れず不等号の向きを変えましたか？

(7) 両辺に 10 を掛けると　$2x - 10 \geqq 4x - 15$

移項して整理すると　$-2x \geqq -5$

よって　$x \leqq \frac{5}{2}$　　← 忘れず不等号の向きを変えましたか？

(8) 両辺に 100 を掛けると　$20x - 9 > 6x - 30$

移項して整理すると　$14x > -21$

よって　$x > -\frac{3}{2}$