

今週の数学の学習ポイント 4 5月第3週

こんにちは。今週もがんばりましょう。この「学習のポイント4」は、5月11日(月)～15日(金)の週のポイントを挙げたものです。

目安としては、**数学Ⅰは第15回くらいまで、数学Aは第10回くらいまで**でしょうか。

教科書の本文、例、例題、応用例題を理解したら、完成ノートの問題に取り組んでください。

(☑ 教科書の練習、補充問題、章末問題は取り組まなくてよいです。)

スタディサプリも利用できるようになりました。4月の復習も兼ねて、第1講から視聴してみてください。「確認テスト」に取り組んでから、視聴してもよいかもしれませんね。時間が経っているのです、復習するにはよいタイミングです。

	数Ⅰ	教科書の ページ数	完成ノートの 問題番号	数A	教科書の ページ数	完成ノートの 問題番号
5/11～	第13回	p.32	62	第9回	p.24, 25, 26 応用例題 5	37, 40, 41, 42, 43, 45, 46
	第14回	p.34, 35, 36, 37	63, 64, 65	第10回	p.25 D, p.27	39, 44, 47, 48, 49, 50
	第15回	p.38, 39, 40	66, 67, 68, 71			

『数学Ⅰ』 第13回 (教科書 p.32 3 TRIAL 問題番号 62)

2重根号 教科書に書かれている文章をより丁寧に詳しく解説してみる。

たとえば、 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ は正の数である。

その理由を考えます。 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{2}$ は明らかに正の数であることは何の疑いもないでしょう。

(復習 $\sqrt{3}$ は、「2乗したら3になる数のうち、**正の方**」を意味しているのでしたね。)

さらに、 $\sqrt{3}$ の方が $\sqrt{2}$ より大きい数であることも当然のことと考えてよいですね。

ですので、**正の数+正の数**は、**正の数**ですね。これが、 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ が正の数であることの理由。

大きな正の数-小さな正の数は、**正の数**ですね。これが、 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ が正の数であることの理由です。

では、 $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ は、正の数でしょうか？

小さな正の数-大きな正の数は、**負の数**です。ですので、 $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ は負の数となるのです。

話を戻します。

$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ は、正の数なのでこれを2乗し、 $\sqrt{\quad}$ を付けたらどうなるかを考えます。

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} &= \sqrt{3} + \sqrt{2} && \text{〇が正の数のとき、}\sqrt{0^2} = 0\text{を使っています。} \\ \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} &= \sqrt{3} + \sqrt{2} && \text{左辺の}\sqrt{\quad}\text{の中を、3, 2という数字を出来るだけ残しつつ展開していきます。} \\ \sqrt{3 + 2\sqrt{3 \cdot 2} + 2} &= \sqrt{3} + \sqrt{2} && \downarrow \\ \sqrt{(3+2) + 2\sqrt{3 \cdot 2}} &= \sqrt{3} + \sqrt{2} && \text{つまり、}\sqrt{5+2\sqrt{6}}\text{という2重に}\sqrt{\quad}\text{が付いた数と}\sqrt{3} + \sqrt{2}\text{は同じ数であるこ} \\ \sqrt{5+2\sqrt{6}} &= \sqrt{3} + \sqrt{2} && \text{とが分かったのです。} \end{aligned}$$

同様に、 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ も、正の数なのでこれを2乗し、 $\sqrt{\quad}$ を付けたらどうなるかも考えると、

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} &= \sqrt{3} - \sqrt{2} && \text{〇が正の数のとき、}\sqrt{0^2} = 0\text{を使っています。} \\ \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} &= \sqrt{3} - \sqrt{2} && \text{左辺の}\sqrt{\quad}\text{の中を、3, 2という数字を出来るだけ残しつつ展開していきます。} \\ \sqrt{3 - 2\sqrt{3 \cdot 2} + 2} &= \sqrt{3} - \sqrt{2} && \downarrow \\ \sqrt{(3+2) - 2\sqrt{3 \cdot 2}} &= \sqrt{3} - \sqrt{2} && \text{つまり、}\sqrt{5-2\sqrt{6}}\text{という2重に}\sqrt{\quad}\text{が付いた数と}\sqrt{3} - \sqrt{2}\text{は同じ数であるこ} \\ \sqrt{5-2\sqrt{6}} &= \sqrt{3} - \sqrt{2} && \text{とが分かったのです。} \end{aligned}$$

一般に、 $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ と2重根号の式を1重根号だけで表すことができます。

このとき、 a, b はともに正の数に限定します。もし、 a が正の数、 b が負の数、例えば $a=3$ 、 $b=-2$ であったら

$\sqrt{1+2\sqrt{-6}} = \sqrt{3} + \sqrt{-2}$ となり $\sqrt{-6}$ や $\sqrt{-2}$ と $\sqrt{\quad}$ の中に、負の数が入ってしまうから、ダメなのです。

さらに、 $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ とできます。

このとき、 a, b はともに正の数で、さらに a の方が b より大きい数とします。

もし、 b の方が大きな数、この時であれば、 $a=2, b=3$ であったら

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{2} - \sqrt{3} \text{ となります}$$

$$\text{しかし、左辺} = \sqrt{5-2\sqrt{6}} \doteq \sqrt{5-2 \times 2.44} = \sqrt{5-4.88} > 0$$

$$\text{右辺} < 0 \text{ (小さな正の数} - \text{大きな正の数は負の数)}$$

正の数=負の数 という明らかに間違っている等式になってしまうから a の方が大きくないとダメなのです。

よって、2重根号 $\sqrt{\bigcirc+2\sqrt{\square}}$ が1重根号の式に変形できるためには、

ある2つの数を用いて、 $\square$ を積の形、

その2つの数を用いて、 $\bigcirc$ を和の形にできるそんな2つの数を発見できれば変形可能です。

発見出来なければ、その2重根号 $\sqrt{\bigcirc+2\sqrt{\square}}$ は、1重根号には変形できません。

つまり、2重根号は、1重根号で表せるときと表せないときがあります。

しかし、「2重根号を簡単にせよ。」と問われたら、必ず変形できるものしか出てきません。

一方、「この建物の高さを求めよ。」みたいな問題があったとき、立式し、式を変形している最中に2重根号が出てきたときは、必ずしも1重根号で表せるとは限りません。そのときは、2重根号のままで良いのです。2重根号で表された数も、正しい表し方なのです。この32頁では、2重根号を1重根号で表せるものだけを取り上げ、その変形の仕方を学ぶのです。

例1 (1) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

かけて15、たして8となる2数を発見します。それは、3と5ですね。

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

(足し算なので $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ と $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ は、全く同じ数です。教科書のように大きい方を前に書くのが安全です)

(2) $\sqrt{8-4\sqrt{3}}$

まず、 $\sqrt{\bigcirc-2\sqrt{\square}}$ の形に変形します。

$$\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{8-2 \cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{8-2\sqrt{12}} \text{ です。 (} 2\sqrt{3} = \sqrt{12} \text{ だからです)}$$

かけて12、たして8となる2数を発見します。それは、2と6ですね。

$$\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{2} - \sqrt{6} \text{ これは間違いです。左辺は正、右辺は負だからです。}$$

よって、正しくは、

$$\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \text{ となります。}$$

(3) $\sqrt{4+\sqrt{15}}$

まず、 $\sqrt{\bigcirc+2\sqrt{\square}}$ の形に変形します。しかし、 $\sqrt{15}$ は $2\sqrt{\square}$ の形に変形できそうもありません。

ここで、 $\sqrt{4+\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{1}$ と考え、分母と分子に $\sqrt{2}$ をかけてみます。

$$\text{すると、} \frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{15}})}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2(4+\sqrt{15})}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} \text{ とでき、}$$

分子が $\sqrt{\bigcirc+2\sqrt{\square}}$ の形にできました。今回は、(1)の結果がそのまま使えますね。

$$\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$$

この3種類の変形の仕方をマスターしましょう。

1 次方程式の解き方

中学で学んだとおり，1次方程式は，**移項**という変形で解くことが出来ます。その移項の元となっている性質が次の「等式の性質」です。

- 1 $A=B$ ならば $A+C=B+C$ 等式の両辺に **同じ数や式を足しても** 等式は成り立つ。
- 2 $A=B$ ならば $A-C=B-C$ 等式の両辺に **同じ数や式を引いても** 等式は成り立つ。
- 3 $A=B$ ならば $AC=BC$ 等式の両辺に **同じ数や式を掛けても** 等式は成り立つ。
- 4 $A=B$ ならば $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$ 等式の両辺を **0でない数や式で割っても** 等式は成り立つ。

不等号について

不等号には，4つの種類がある。

< 小なり 例 $x < 2$ x は 2 より小さい

> 大なり 例 $x > 0$ x は 0 より大きい (x は正の数である)

$\leq$ 小なりイコール 例 $x \leq 3$ x は 3 以下

補足「 $x \leq 3$ 」は，「 $x < 3$ または $x = 3$ 」を意味している。(x は 3 より小さいか **または** x は 3 に等しい)

$\geq$ 大なりイコール 例 $x \geq -1$ x は -1 以上

補足「 $x \geq -1$ 」は，「 $x > -1$ **または** $x = -1$ 」を意味している。(x は -1 より大きい **または** x は -1 に等しい)

例「 $0 < x < 2$ 」は，「 x は 0 より大きく，**かつ** 2 より小さい」を意味している。

不等式の性質について

(1～4は $A < B$ で書いてあるが，この部分を $A > B$ や $A \leq B$ や $A \geq B$ にしても本質的には同じである。)

- 1 $A < B$ ならば $A+C < B+C$ 不等式の両辺に **同じ数や式を足しても** 不等式の向きは変わらない。
- 2 $A < B$ ならば $A-C < B-C$ 不等式の両辺に **同じ数や式を引いても** 不等式の向きは変わらない。
- 3 $A < B$ ， **$C > 0$** ならば $AC < BC$ 不等式の両辺に **同じ正の数や式を掛けても** 不等式の向きは変わらない。

$A < B$ ， **$C > 0$** ならば $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$ 不等式の両辺を **同じ正の数や式で割っても** 不等式の向きは変わらない。

- 4 $A < B$ ， **$C < 0$** ならば $AC > BC$ 不等式の両辺に **同じ負の数や式を掛けると 不等式の向きは変わる。**

$A < B$ ， **$C < 0$** ならば $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ 不等式の両辺を **同じ負の数や式で割ると 不等式の向きは変わる。**

等式の性質と異なることのが，**掛け算と割り算**である。

正の数を掛ければ (正の数で割れば)，不等号の向けは変わらず，もとの式の不等号を書けば良いのだが
負の数を掛ければ (負の数で割れば)，不等号の向きは，**もとの式の不等号の向きとは逆向き**にせねばならない。

このことを $A=10$ ， $B=-5$ で確認してみよう。つまり $10 > -5$ である。

- 1の性質 $C=-2$ としてみる。 -2 を両辺に足すと $8 > -7$ となる。不等号の向きは変わらない。
- 2の性質 $C=2$ としてみる。 2 を両辺から引くと $8 > -7$ となる。不等号の向きは変わらない。
- 3, 4の性質 $C=2$ としてみる。 2 を両辺に掛けると $20 > -10$ となる。不等号の向きは変わらない。
 $C=-2$ としてみる。 -2 を両辺に掛けると $-20 < 10$ となる。**不等号の向きが変わる。**
 $C=2$ としてみる。 2 で両辺を割ると $5 > -\frac{5}{2}$ となる。不等号の向きは変わらない。
 $C=-2$ としてみる。 -2 で両辺を割ると $-5 < \frac{5}{2}$ となる。**不等号の向きが変わる。**

「不等式の解」と「不等式を解く」の違い

$x=1$ は $3x-5<10$ の解である。（ $x=1$ を $3x-5<10$ に代入してみると、 $-2<10$ と正しい大小関係になる）

$x=2$ は $3x-5<10$ の解である。（ $x=2$ を $3x-5<10$ に代入してみると、 $1<10$ と正しい大小関係になる）

$x=3$ は $3x-5<10$ の解である。（ $x=3$ を $3x-5<10$ に代入してみると、 $4<10$ と正しい大小関係になる）

$x=4$ は $3x-5<10$ の解である。（ $x=4$ を $3x-5<10$ に代入してみると、 $7<10$ と正しい大小関係になる）

$x=5$ は $3x-5<10$ の解でない。（ $x=5$ を $3x-5<10$ に代入してみると、 $10<10$ と間違った大小関係になる）

$x=6$ は $3x-5<10$ の解でない。（ $x=6$ を $3x-5<10$ に代入してみると、 $12<10$ と間違った大小関係になる）

よって、 $x=1, 2, 3, 4$ は $3x-5<10$ の解である。

x は 5 より小さな数であれば、すべて $3x-5<10$ の解となることが何となく分かる。

不等式の解をすべて求めることを、その不等式を解くといいます。

$3x-5<10$ の解をすべて書くことはできるのでしょうか。

5 より小さな整数だけに絞って考えてみても、無数にあります。

$x=\frac{1}{2}$ を $3x-5<10$ に代入すると、 $-\frac{7}{2}<10$ となり正しい大小関係となっていることからこれも解です。

5 より小さな数であれば、整数だけではなく、有理数も解であることがわかります。

$x=\sqrt{2}$ を $3x-5<10$ に代入してみます。 $3\sqrt{2}-5<10$ ……① となります。これは正しい大小関係でしょうか。

左辺の $3\sqrt{2}-5$ というのはこれ以上まとめられないので $3\sqrt{2}-5$ の近似値を考えてみます。

$\sqrt{2}\doteq 1.4$ として考えてみると $3\sqrt{2}-5\doteq 3\cdot 1.4-5=4.2-5=-0.8$ となり 10 より小さな値ですので、式①は正しい大小関係であることがわかります。

つまり、有理数だけでなく 5 より小さな無理数も解であることがわかります。

以上をまとめると、5 より小さな実数（有理数と実数を合わせた数の範囲）がどうもこの不等式の解となり、すべてを規則正しく書き並べるのは、無理な気がします。

ここで、不等号の登場です。

「 x は 5 より小さな実数」がすべての解を表した表現です。これを不等号を用いて表せば「 $x<5$ 」と書けます。

逆に「 $x<5$ 」と書けば、「 x は 5 より小さなすべての実数」という意味と考えてもらって構いません。

よって、不等式 $3x-5<10$ の解（すべての）は、 $x<5$ と答えればよいのです。

上記のように、いくつか数を代入して解を探すのもよいのですが、手間がかかります。

教科書にあるように、1 次不等式は「不等式の性質」を利用して、解くのが良いでしょう。

$$3x-5<10$$

$$3x<10+5 \quad -5 \text{ を移項する}$$

$$3x<15$$

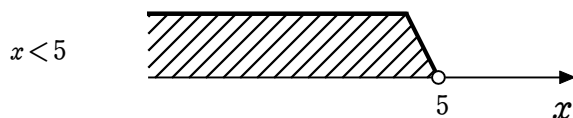
$$x<\frac{15}{3} \quad 3x \text{ の } 3 \text{ を移項する（両辺を } 3 \text{ で割る。} 3 \text{ は正の数なので、不等号の向きは変わらない）}$$

$$x<5$$

簡単に、解くことができました。

繰り返しになりますが、「 $x<5$ 」には「5 より小さなすべての数が解である」という風に理解してください。

教科書 p.40 の下の方にかかれている「数直線での表し方」で「 $x<5$ 」を表すとこのすべての数という範囲の感覚がわかりやすくなりますね。



応用例題4

男子4人と女子3人を1列に並べる問題です。この男子4人は、特に名前を書いていませんが、一人ひとり異なる人で、同じ人はいません。たとえ、見た目が区別できないほど似ている双子が入っていても、必ず区別します。

例えばこの問題が、「Aを4つとBを3つを1列に並べる。」となると、状況が一変します。この文字は、区別できるのでしょうか。A, A, A, Aという風に異なるんだ、とでも書いてあれば、区別しますが、単に「Aを4つ」としか書かれてないときは、「区別しない」と考えるのです。「りんご4つと梨3つ」でも区別しません。人を扱う場合は、無条件に「区別する」です。

応用例題4のように、並べ方に指定（(1)両端男子 (2)女子3人連続）があれば、その指定されたところから考えていけばよいのです。

(1) □□□□□□□ ←7人が座る座布団だと思ってください。

まず、左端は男子なので、4通りの選び方があります。（仮にA君, B君, C君, D君の誰か1人を座らせる）

続いて、右端も男子なので、3通りの選び方があります。（A君, B君, C君, D君の誰か1人はもう座ったので）

さらに、左から2番目は、男女どちらでも構わないので、5通り（残りの男子2人と女子3人の5人から1人）

さらに、左から3番目は、4通りの選び方があり、

さらに、左から4番目は、3通りの選び方があり、

さらに、左から5番目は、2通りの選び方があり、

最後に、左から6番目は、1通りの選び方しかありません。

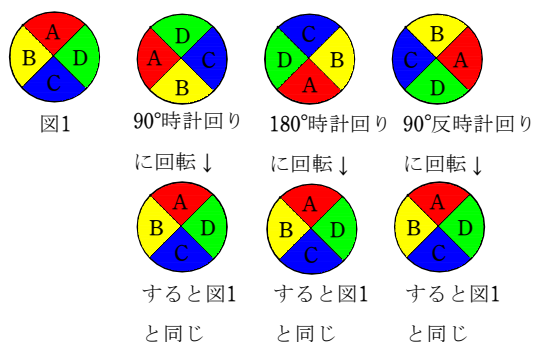
左端→右端→左から2番目→3番目→4番目→5番目→6番目と、続けて選んでいくので「積の法則」より求める並べ方は、 $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$ (通り) となるのです。

これを教科書は、両端の選び方は ${}_4P_2$ 通り、その間の並べ方は $5!$ 通りという風にまとめているだけなのです。

最初のうちは、なかなか教科書の解答は、あまりよくわからないかもしれません。そんな時は、一つ一つ考えてみることで、規則性がわかり納得できると思います。

円順列 回転させると、同じ並びになるものは同じ並べ方とみなす円形に並べる順列のこと。

例 A(赤), B(黄), C(青), D(緑)の4色すべてを使って円盤を4等分した各部分の塗り分ける



このように、回転すると同じになる（どの図も反時計回りの向きでA→B→C→Dとなっている）

よって、これら4つ図形は、たった1通りと考えるのである。

では、円順列の総数の数え方を考えてみます。考え方は、2種類あります。2種類とも、円順列の総数の数え方としては、異なる考え方ですが、当然ながら、同じ答えになります。できれば、どちらの考え方も理解してください。そして、円順列の問題を解くときは、使いやすい方で計算してもらって構いません。

円順列の総数の数え方（その1）

教科書の考え方

1か所を先に決めてしまい、残りの部分を考える方法（通称：回転を止める方法）

まず、A(赤)に着目し、その塗り方を考える。

塗る場所は、4ヶ所あるから4通りの異なる塗り方があるように思えるが、この円盤は回転させることができるので、A(赤)の塗り方は、実は1通りしかないことがわかる。

A(赤)を左に塗っても、右に塗っても、下に塗っても、回転させれば上に塗ったことにすることができる。



まず、A(赤)を塗る。その方法は、1通りである。

すると、A(赤)は上の部分に塗ったと固定することができ、回転を止めることができる。

この回転を止めるというのは、A(赤)から見た位置は、右、正面、左の3ヶ所に決まるということを言い換えたものである。だから、円順列の総数の数え方は、まず1つ何か着目したものを並べ(最初の1つの並べ方は、必ず1通りである)、1個減らした残りのものを1列に並べる順列を考えればよいのである。

今回の円盤の塗り方は、 $(4-1)! = 3! = 6$ (通り)となる。

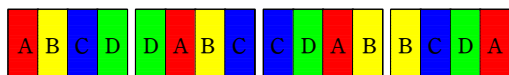
この「-1」が、着目した1つ目の物は、すでに並べ終わっているために、引いているのである。

円順列の総数の数え方（その2）

順列の総数から考える方法

例えば、A(赤)、B(黄)、C(青)、D(緑)の4色すべてを使つての塗り分け方を次の2つの図形で考えてみる。

(1) 長方形を4等分した各部分を塗る



ABCD, DABC, CDAB, BCDA
これら4通りは異なる並べ方

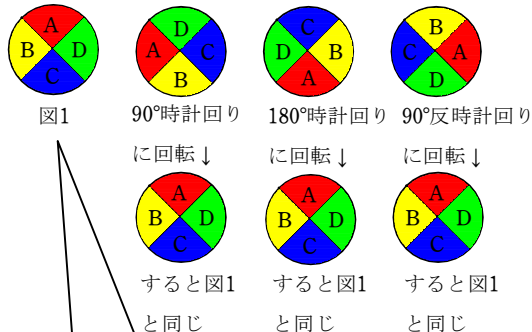
長方形の各部分の塗り方は、全部で、

$4! = 24$ (通り)あり

上の塗り方は、例としてその4通りを

取り出しました。あと、20通りあります。

(2) 円盤を4等分した各部分を塗る



ABCD, DABC, CDAB, BCDA

これら4通りは円形に並べ回転させるとABCDとなり1通りの並べ方

長方形の各部分の塗り方は、 $4!$ 通りを利用して円盤の塗り方を考える。

$4! = 24$ (通り)を以下の6グループに分けることができる。

これは、回転させると同じになる4つずつを1グループにしたものである。

どのグループも4通りが1通りに減っていることがわかると思う。

ABCD, DABC, CDAB, BCDA → ABCD

ABDC, CABD, DCAB, BDCA → ABDC

ACBD, DACB, BDAC, CBDA → ACBD

ACDB, BADC, DBAC, CDBA → ACDB

ADBC, CADB, BCAD, DBCA → ADBC

ADCB, BADC, CBAD, DCBA → ADCB

よって、順列を割って

減らせば求まる

$$\frac{4!}{4} = 3! = 6 \text{ (通り)}$$

公式 1 円順列の総数 (1つ決めて回転を止める数え方)

異なる n 個のものを円形に並べる方法の総数は $(n-1)!$ 通り

公式 2 円順列の総数 (同じ並べ方を割って取り除く数え方)

異なる n 個のものを円形に並べる方法の総数は $\frac{n!}{n}$ 通り

どちらの公式を用いても構いません。

教科書p.26

応用例題 5 男子 4 人と女子 4 人が輪の形に並ぶとき、男女が交互に並ぶような並び方は何通りあるか。

解説 男子でも女子でもどちらかにまず着目して、先に円形に並べてしまう。このとき、円順列の数え方になる。

そのあと、選ばなかった方の性別の 4 人を、すでに並んでいる 4 人の間に並べるのだが、このときも円順列で考える人が少なくない。しかし、よく考えてもらいたいのは、すでに 4 人が並んでいるので、この 4 人との位置関係にのみ着目すれば、回転は止まっていると考えることができ、単なる順列で考えることができる。ですので、1 人でもすでに、円形の一部として並ばせた後は、円順列ではなく、単なる順列として考えるのである。このことは、円順列の総数の数え方(その 1)の考え方と同じである。

『数学 A』 第 10 回 (教科書 p.25 D, p.27 3 TRIAL 問題番号 39, 44, 47, 48, 49, 50)

重複順列 (ちょうふくじゅんれつ あるいは じゅうふくじゅんれつ と読みます。どちらでもよいです。)

同じものを繰り返し使ってもよい順列。問題に「重複を許して」「繰り返し同じものを用いてよい」などが書かれているので、区別は容易である。今までの順列の場合は、一度並べると次からは、それを除いて並べる方法を考える必要があった。

例えば、異なる 5 個の記号 $\bigcirc, \times, \triangle, \square$ を 1 列に並べる順列の総数は

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ (通り)} \dots\dots ①$$

という風に、最初の場所への並べ方は 4 通りで、その次の場所の並べ方は 3 通り、……と 1 つずつ減らしたが、これが、異なる 4 個の記号 $\bigcirc, \times, \triangle, \square$ を重複を許して 5 個並べる順列の総数は、と問われたら

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024 \text{ (通り)} \dots\dots ②$$

という風に、最初の場所への並べ方は 4 通りで、同じであるが、次の場所への並べ方も 4 通り、……と減らない。これだけの違いである。

教科書では、公式として

n 個から r 個取る重複順列の総数は n^r

と書いてあるが、別に指数を用いた表示をせずとも、上のように一つ一つ掛ければよいだけなのである。

①の式を $4!$ と表したり、②の式を 4^5 と表したりして、こういう風に書かなければならないと思わなくてもよいのである。だんだんと慣れてくれば、 $4!$ や 4^5 と短縮した書き方が出来るようになるだけである。

研究 立方体の色塗り

立方体は、回転させることができるので、円順列の総数の数え方（その1）を利用して、6面を6色で塗り分ける方法を数えてみる。今回使う色は、赤青黄白緑黒

[1] まず、どれか1色に着目し、塗る。（今回は赤に着目）この塗り方は、1通りしかない。

6面のどこに塗ろうが、回転させれば、必ず下の面に固定することができるから。

[2] 次にどこを塗るかが大切である。残り5面のどこを塗ってもよいのだが、ここは、上の面を塗るのが簡単である。赤を塗った下の面に向かい合っている面は、たった1面しかない。それ以外の4つの面（側面）から1面を選んだ（例えば、右の面）としても、回転させれば手前の面にすることができてしまう。その点、赤を塗った下の面が固定されているので、上の面は上の面なのである。だから、上の面を塗ることを考えればよい。上の面は、赤以外の5色青黄白緑黒のどれを使うかの選び方があるので、5通り

[3] 下面と上面を塗ったので、残りは4面。この4面は、立方体を横回転させることができるので、側面の塗り方は、4色の円順列になる。よって、 $(4-1)! = 3! = 6$ (通り)

[1]，[2]，そして[3]と続けて塗っていくので、積の法則より、
立方体の6面に6色の塗り分け方は、 $1 \cdot 5 \cdot 6 = 30$ (通り) となる。

3TRIAL 完成ノート 問題番号47 では、正四面体の塗り分けが出題されている。上の考え方を利用して、やってみよう。