３ＴＲＩＡＬ　完成ノート　ポイント解説　数学Ａ

準備　集合

第１章　場合の数と確率　第１節　場合の数

1

30 以下の素数全体の集合を A とする。次の $\boxed{}$ に適する記号 $\in$ または $\notin$ を入れよ。

(1)　7 $\boxed{}$ A　　(2)　17 $\boxed{}$ A　　(3)　27 $\boxed{}$ A　　(4)　37 $\boxed{}$ A

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29\}$ である。

(1)　$7\in A$　　(2)　$17\in A$　　(3)　$27\notin A$　　(4)　$37\notin A$

解説　素数の調べ方（以下の手順で，合成数を消していく方法は“エラトステネスの篩(ふるい)”と呼ばれている。）

①　30以下の自然数を 10 個ずつ 3 段に書き並べる。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

②　1 は素数でないので，消す。

③　2の倍数を 2以外で消していく（縦に消えていく）

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~

④　3 の倍数を 3 以外で消していく（斜めに消えていく）

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

⑤　5 の倍数を 5 以外で消していく（5 の列だけ新たに消えていく）

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

⑥　7 の倍数を 7 以外で消していく（14,21,28 は既に消えているが）

⑦　この時点で残っている数は，素数であるので，○をつける。

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

発展　30 が今回考える最大数であるので，$\sqrt{30}$ を考える。

$25<30<36$ であるから，

$\sqrt{25}<\sqrt{30}<\sqrt{36}$

$5<\sqrt{30}<6$

よって，$\sqrt{30}$ は 6 未満の数であることがわかる。

よって，30 以下の素数を調べるとき，6 未満の最大素数 5 の倍数 を消した時点で残った数が素数であると断定してよい。

ですので，手順 ⑥ では，新たに消える合成数はなかったのである。

30 以下の素数を調べるのに，$\sqrt{30}$ 以下の倍数を考えれば充分であるのはなぜか考えてみよう。 →

2

次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(1)　6 以下の自然数全体の集合 A　　(2)　$B=\{x \mid x$ は 16 の正の約数$\}$

(3)　2 桁の正の奇数全体の集合 C　　(4)　$D=\{5n \mid n$ は 20 以下の自然数$\}$

(1)　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$　　(2)　$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

(3)　$C=\{11,\ 13,\ 15,\ \cdots\cdots,\ 99\}$　　(4)　$D=\{5,\ 10,\ 15,\ \cdots\cdots,\ 100\}$

解説　集合は，{　} を用いて書く。

要素の個数が多くて，省略しても予想できるときは，最初の 3 項を書き，「…」で省略できる。

3

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ とする。$B=\{1,\ 2,\ 3\}$，$C=\{2,\ 4,\ 6\}$，$D=\{1,\ 10\}$，$E=\{8\}$ のうち，集合 A の部分集合であるものはどれか。

集合 B の要素 1 と 3 が A の要素でない。

集合 C のすべての要素が A の要素である。

集合 D の要素 1 が A の要素でない。

集合 E のすべての要素が A の要素である。

よって，A の部分集合であるものは　C，E

4

次の 2 つの集合の関係を，$\subset$，$\supset$，$=$ を使って表せ。

(1)　$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$，$B=\{3,\ 7,\ 9\}$

(2)　$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，1 桁の素数全体の集合 D

(3)　$P=\{x \mid x$ は 15 の正の約数$\}$，$Q=\{x \mid x$ は 30 の正の約数$\}$

(1)　$3\in A$，$7\in A$，$9\in A$ であるから，B のすべての要素が A の要素である。また，$1\in A$ であるが $1\notin B$

　よって　　$A\supset B$

(2)　$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$D=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

　よって　　$C=D$

(3)　$P=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$，$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$

　よって　　$P\subset Q$

5

次の集合の部分集合をすべてあげよ。

(1)　$\{4,\ 5\}$　　(2)　$\{1,\ 2,\ 3\}$　　(3)　$\{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \mathrm{d}\}$

(1)　$\varnothing$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{4,\ 5\}$

(2)　$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,\ 2\}$，$\{1,\ 3\}$，$\{2,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

(3)　$\varnothing$，$\{\mathrm{a}\}$，$\{\mathrm{b}\}$，$\{\mathrm{c}\}$，$\{\mathrm{d}\}$，

　$\{\mathrm{a},\ \mathrm{b}\}$，$\{\mathrm{a},\ \mathrm{c}\}$，$\{\mathrm{a},\ \mathrm{d}\}$，$\{\mathrm{b},\ \mathrm{c}\}$，$\{\mathrm{b},\ \mathrm{d}\}$，$\{\mathrm{c},\ \mathrm{d}\}$，

　$\{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}\}$，$\{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{d}\}$，$\{\mathrm{a},\ \mathrm{c},\ \mathrm{d}\}$，$\{\mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \mathrm{d}\}$，$\{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \mathrm{d}\}$

解説　$\varnothing$ は，空集合を表す。これ自体で集合ですので，
$\{\varnothing\}$ と書くのは，間違いになります。
$\{\ \ \}$ の中に書くのは，要素です。
空集合には，要素は一つもありません。

6

次の集合 A，B について，$A\cap B$ と $A\cup B$ を求めよ。

(1)　$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

(2)　$A=\{2,\ 3,\ 5\}$，$B=\{1,\ 4,\ 6,\ 7\}$

(3)　$A=\{x \mid x$ は 16 の正の約数$\}$，$B=\{x \mid x$ は 24 の正の約数$\}$

(4)　$A=\{x \mid x$ は 18 の正の約数$\}$，$B=\{x \mid x$ は 30 の正の約数$\}$

(1)　$A\cap B=\{1,\ 3\}$，$A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

(2)　$A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

(3)　$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$ であるから

　　$A\cap B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24\}$

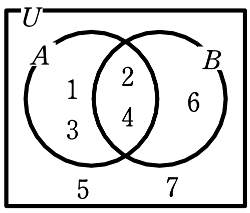
(4)　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$ であるから

　　$A\cap B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$，$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 15,\ 18,\ 30\}$

7

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$ について，次の集合を求めよ。　(1)　$\overline{A}$　　(2)　$\overline{B}$　　(3)　$\overline{A}\cap B$　　(4)　$A\cup\overline{B}$　　(5)　$\overline{A}\cup B$　　(6)　$A\cap\overline{B}$

A，B，U の要素を図に書き込んでいくと，右のようになる。



(1)　$\overline{A}=\{5,\ 6,\ 7\}$　　(2)　$\overline{B}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

(3)　$\overline{A}\cap B=\{6\}$　　(4)　$A\cup\overline{B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$

(5)　$\overline{A}\cup B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$　　(6)　$A\cap\overline{B}=\{1,\ 3\}$

8

$U=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A=\{4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11\}$，$B=\{4,\ 9,\ 10,\ 11\}$ について，ド・モルガンの法則を用いて，次の集合を求めよ。

(1)　$\overline{A\cap B}$　　　　(2)　$\overline{A\cup B}$

ド・モルガンの法則により　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

また　$\overline{A}=\{6,\ 9,\ 10,\ 12\}$　　$\overline{B}=\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 12\}$

(1)　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}=\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

(2)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\{6,\ 12\}$

解説　ド・モルガンの2種類の法則を，その式の対称性や特徴で覚えてしまいましょう。

かつ ⟷ または

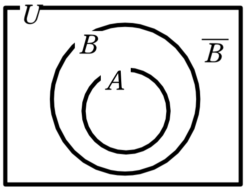
全体のバー ⟷ バラバラのバー

9

全体集合 U の部分集合 A，B について，$A\subset B$ のとき，次の $\boxed{}$ に適する文字や記号を入れよ。

(1)　$A\cap B=\boxed{}$　　(2)　$A\cup B=\boxed{}$　　(3)　$A\cap\overline{B}=\boxed{}$

$A\subset B$ であるから，集合 A，B，$\overline{B}$ を図示すると右のようになる。



(1)　$A\cap B=A$

(2)　$A\cup B=B$

(3)　$A\cap\overline{B}=\varnothing$

解説　ベン図に，$A\cap B$ や $A\cup B$，$A\cap\overline{B}$ を塗ってみると，わかるでしょう。

10

$U=\{x\mid x$ は10以下の自然数$\}$ を全体集合とする。U の部分集合

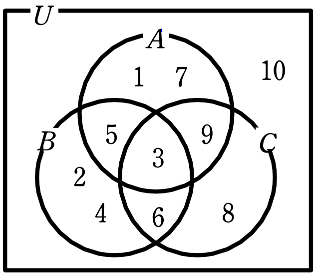
$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，　$B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，　$C=\{3,\ 6,\ 8,\ 9\}$

について，次の集合を求めよ。

(1)　$A\cap B\cap C$　　(2)　$A\cup B\cup C$　　(3)　$(A\cap B)\cup C$

(4)　$A\cap(B\cup C)$　　(5)　$\overline{A}\cap(B\cup\overline{C})$　　(6)　$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{C}$

A，B，C，U の要素を図に書き込んでいくと，右のようになる。



(1)　$A\cap B\cap C=\{3\}$

(2)　$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(3)　$A\cap B=\{3,\ 5\}$ であるから

$(A\cap B)\cup C=\{3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$

(4)　$B\cup C=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$ であるから

$A\cap(B\cup C)=\{3,\ 5,\ 9\}$

(5)　$B\cup\overline{C}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10\}$ であるから

$\overline{A}\cap(B\cup\overline{C})=\{2,\ 4,\ 6,\ 10\}$

(6)　$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ であるから

$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{C}=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 10\}$

解説　まずは，与えられた条件を満たすベン図を作り上げましょう。そして，(1)から順に，表す集合はそのベン図では，どこに該当するのか読み取れば，解けると思います。

参考　$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{C}=\overline{(A\cap B)}\cap\overline{C}=\overline{(A\cap B)\cup C}$　が成り立つ。　解説　ド・モルガンの法則を用いている。

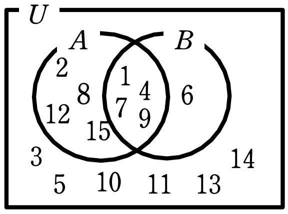
11

15 以下の自然数全体の集合を全体集合 U とする。
U の部分集合 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 9,\ 12,\ 15\}$，$B=\{1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9\}$ について，次の個数を求めよ。

(1) $n(A)$　　(2) $n(B)$　　(3) $n(A\cap B)$
(4) $n(A\cup B)$　　(5) $n(\overline{A})$　　(6) $n(\overline{B})$
(7) $n(\overline{A\cup B})$　　(8) $n(A\cap\overline{B})$　　(9) $n(\overline{A}\cap B)$

(1) $n(A)=8$

(2) $n(B)=5$



解説 (4) の $n(A\cup B)$ は，(1) から (3) までで，$n(A)$，$n(B)$，$n(A\cap B)$ が求まっているのでその足し引きで求まる。

(3) $A\cap B=\{1,\ 4,\ 7,\ 9\}$ であるから
$n(A\cap B)=4$

(4) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 12,\ 15\}$ であるから
$n(A\cup B)=9$

別解 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=8+5-4=9$

(5) $\overline{A}=\{3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14\}$ であるから
$n(\overline{A})=7$

別解 $n(\overline{A})=n(U)-n(A)=15-8=7$

(6) $\overline{B}=\{2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$ であるから
$n(\overline{B})=10$

別解 $n(\overline{B})=n(U)-n(B)=15-5=10$

(7) $\overline{A\cup B}=\{3,\ 5,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14\}$ であるから
$n(\overline{A\cup B})=6$

別解 $n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=15-9=6$

(8) $A\cap\overline{B}=\{2,\ 8,\ 12,\ 15\}$ であるから
$n(A\cap\overline{B})=4$

(9) $\overline{A}\cap B=\{6\}$ であるから　　$n(\overline{A}\cap B)=1$

12

全体集合 U の部分集合 A，B について，$n(U)=100$，$n(A)=36$，$n(B)=42$，$n(A\cap B)=15$ であるとき，次の個数を求めよ。

(1) $n(\overline{A})$　　(2) $n(\overline{B})$　　(3) $n(\overline{A\cap B})$
(4) $n(A\cup B)$　　(5) $n(\overline{A\cup B})$　　(6) $n(\overline{A}\cap\overline{B})$

(1) $n(\overline{A})=n(U)-n(A)=100-36=64$

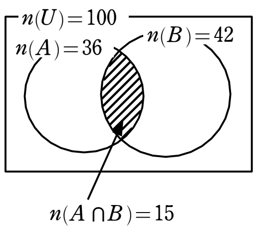
(2) $n(\overline{B})=n(U)-n(B)=100-42=58$

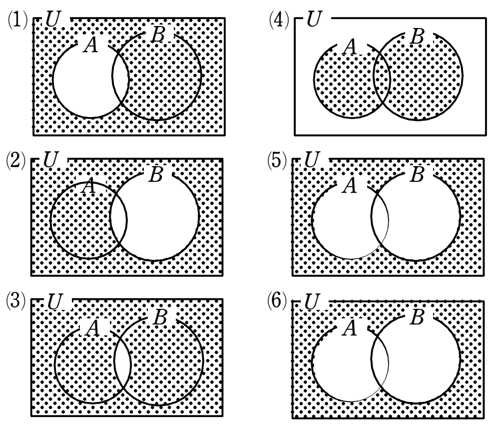
(3) $n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)=100-15=85$

(4) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=36+42-15=63$

(5) $n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=100-63=37$

(6) $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ であるから，(5) より
$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=37$





13

次のような自然数の個数を求めよ。

(1)　100 以下の 4 の倍数　　(2)　500 以下の 7 の倍数　　(3)　1000 以下の 16 の倍数

(1)　100 以下の自然数のうち，4 の倍数全体の集合は $\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ 4\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$　よって，求める個数は　25 個

(2)　500 以下の自然数のうち，7 の倍数全体の集合は $\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ 7\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot71\}$　よって，求める個数は　71 個

(3)　1000 以下の自然数のうち，16 の倍数全体の集合は $\{16\cdot1,\ 16\cdot2,\ 16\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 16\cdot62\}$

よって，求める個数は　62 個

別解　(1)　100 以下の 4 の倍数の個数は，$100\div4=25$ より，25 個

(2)　500 以下の 7 の倍数の個数は，$500\div7=71.4\cdots$ より，71 個

注意　$500\div7=71\cdots3$ という書き方は，数学ではしません。等式として認められる書き方は上記のような書き方です。

(3)　1000 以下の 16 の倍数の個数は，$1000\div16=62.5$ より，62個

14

100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1)　7 の倍数　　(2)　7 の倍数でない数

(3)　5 の倍数かつ 7 の倍数　　(4)　5 の倍数または 7 の倍数

100 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，7 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B とすると

$$A=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ 7\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot14\},\ B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$$

(1)　$n(A)=14$ (個)

(2)　求めるのは $n(\overline{A})$ である。　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=100-14=86$ (個)

(3)　求めるのは $n(A\cap B)$ である。$A\cap B$ は 35 の倍数全体の集合だから $A\cap B=\{35,\ 70\}$　よって　$n(A\cap B)=2$ (個)

(4)　求めるのは $n(A\cup B)$ である。　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=14+20-2=32$ (個)

別解　100 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，7 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B とすると

(1)　100 以下の 7 の倍数の個数 $n(A)$ は，$100\div7=14.2\cdots$ より $n(A)=14$ (個)

(2), (3)　上記と同じ

(4)　100 以下の 5 の倍数の個数 $n(B)$ は，$100\div5=20$ より $n(B)=20$

求めるのは $n(A\cup B)$ であるから，$n(A\cup B)=14+20-2=32$ (個)

15

100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1)　5 で割って 2 余る数　　(2)　4 と 6 の少なくとも一方で割り切れる数

(1)　100 以下の自然数のうち，5 で割って 2 余る数全体の集合は　$\{5\cdot0+2,\ 5\cdot1+2,\ 5\cdot2+2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot19+2\}$

よって，求める個数は　$19+1=20$ (個)

(2)　100 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，4 で割り切れる数全体の集合を A，6 で割り切れる数全体の集合を B とすると　$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ 4\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$，$B=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$

よって　$n(A)=25$，$n(B)=16$

求めるのは $n(A\cup B)$ である。

$A\cap B$ は 12 の倍数全体の集合であるから　$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ 12\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot8\}$　よって　$n(A\cap B)=8$

したがって　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=25+16-8=33$ (個)

別解

(2)　100 以下の自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，4 で割り切れる数全体の集合を A，6 で割り切れる数全体の集合を B とすると

$100\div4=25$ より　$n(A)=25$　　$100\div6=16.6\cdots$ より　$n(B)=16$

4 と 6 の最小公倍数は 12 であるから，$A\cap B$ は 12 の倍数全体の集合である。　$100\div12=8.3\cdots$ より　$n(A\cap B)=8$

したがって，求めるのは $n(A\cup B)$ であるから　$n(A\cup B)=25+16-8=33$ (個)

16

> 51 から 100 までの自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。
> (1)　3 と 5 の少なくとも一方で割り切れる数
> (2)　3 で割り切れるが，5 では割り切れない数
> (3)　3 でも 5 でも割り切れない数

51 から 100 までの自然数全体の集合を U とし，
U の部分集合で，3 で割り切れる数全体の集合を A，
5 で割り切れる数全体の集合を B とすると

$U=\{51,\ 52,\ 53,\ \cdots\cdots,\ 100\}$　であるから　$n(U)=100-51+1=50$

$A=\{3\cdot17,\ 3\cdot18,\ 3\cdot19,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$ であるから　$n(A)=33-17+1=17$

$B=\{5\cdot11,\ 5\cdot12,\ 5\cdot13,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$ であるから　$n(B)=20-11+1=10$

両端同士の差では，1 つ引きすぎてしまいますので，それを補うために「+1」をつけています。

別解　50 から 100 までの自然数のうち 3 の倍数の個数 $n(A)$ は，
$100\div3=33.3\cdots$
$49\div3=16.3\cdots$ であるから
$n(A)=33-16=17$(個)
として求めることもできる。
注　このとき，50 より 1 小さい数 49 を使います。「50 から」なので 50 にしがちですが。

(1)　求めるのは $n(A\cup B)$ である。

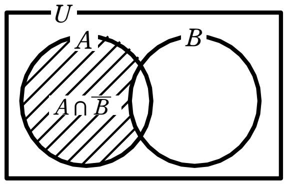
$A\cap B$ は 15 で割り切れる数全体の集合であるから

$A\cap B=\{60,\ 75,\ 90\}$

よって　$n(A\cap B)=3$

したがって　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=17+10-3=24$ (個)



(2)　3 で割り切れるが，5 では割り切れない数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ である。

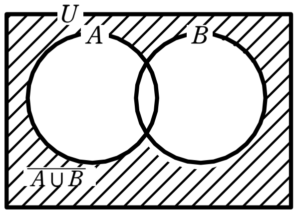
よって，求める個数は

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=17-3=14$ (個)

(3)　3 でも 5 でも割り切れない数全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$，すなわち $\overline{A\cup B}$ である。

よって，求める個数は

$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=50-24=26$ (個)



17

> 50 人の人に A と B の 2 問のクイズを出題したところ，A を正解した人は 27 人，B を正解した人は 13 人，A，B をともに正解した人は 4 人であった。次の人は何人いるか。
> (1)　A と B の少なくとも一方を正解した人
> (2)　A も B も正解しなかった人
> (3)　A だけ正解し，B は正解しなかった人

この 50 人の集合を U とし，A を正解した人の集合を A，B を正解した人の集合を B とすると

$n(A)=27,\ n(B)=13,\ n(A\cap B)=4$

(1)　A と B の少なくとも一方を正解した人の集合は $A\cup B$ である。

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=27+13-4=36$ (人)

(2)　A も B も正解しなかった人の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$，すなわち $\overline{A\cup B}$ である。

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$　←　ド・モルガンの法則 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ を用いた

$=50-36=14$ (人)

(3)　A だけ正解し，B は正解しなかった人の集合は $A\cap\overline{B}$ である。

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$

$=27-4=23$ (人)

18

60 人の生徒に 2 種類の本 A，B を読んだことがあるかどうかを聞いたところ，A を読んだ生徒が 30 人，B を読んだ生徒が 50 人，A も B も読んでいない生徒は 8 人であった。 (1)　A，B の少なくとも一方を読んだ生徒は何人いるか。 (2)　2 種類とも読んだ生徒は何人いるか。 (3)　B だけ読んで，A は読んでいない生徒は何人いるか。

この 60 人の生徒の集合を U とし，A を読んだ生徒の集合を A，B を読んだ生徒の集合をB とすると

$n(A)=30$，$n(B)=50$，$n(\overline{A}\cap\overline{B})=8$

(1)　A，B の少なくとも一方を読んだ生徒の集合は $A\cup B$ である。

$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A\cup B})$

$=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})$　← ド・モルガンの法則 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ を用いた

$=60-8=52$（人）

(2)　2 種類とも読んだ生徒の集合は $A\cap B$ である。

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ であるから

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$　← ポイント

解説
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ において，
$n(A\cup B)$ を右辺に，$-n(A\cap B)$ を左辺に移項したら
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
が得られます。

よって　　$n(A\cap B)=30+50-52=28$（人）

(3)　B だけ読んで，A は読んでいない生徒の集合は $\overline{A}\cap B$ である。

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$　← ベン図をかいて確認すれば，わかります。

$=50-28=22$（人）

19

海外旅行者 100 人のうち，75 人がカゼ薬を，80 人が胃薬を携帯していた。カゼ薬と胃薬を両方とも携帯していた人の数を m とするとき，m のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

この 100 人の海外旅行者全体の集合を U とし，カゼ薬を携帯していた人の集合を A，胃薬を携帯していた人の集合を B とすると

$n(A)=75$，$n(B)=80$

$n(A\cap B)$ が最大値をとるのは

$A\subset B$ のときである。（**補足** A の方が B より人数が少ないから）

このとき　　$m=n(A\cap B)=n(A)=75$

$n(A\cap B)$ が最小値をとるのは

$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$ すなわち $A\cup B=U$ のときである。

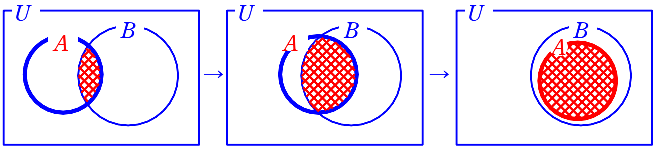
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=75+80-100=55$

よって　　最大値 75，最小値 55

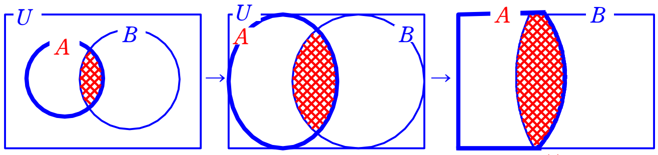
$\boxed{n(A\cap B)\text{の最大値}}$　$A\cap B$ の面積がだんだん大きくなるように A を動かしていくと



$A\cap B$ が最大はこのとき
つまり $A\cap B=A$ のとき

補足 A の人数と B の人数の単純な合計は155人で，
これは全体集合 U の 100 人より大きくなるから $A\cap B\neq\varnothing$ である。

$\boxed{n(A\cap B)\text{の最小値}}$　$A\cap B$ の面積がだんだん小さくなるように
逆に考えると $\overline{A}\cap\overline{B}$ が空集合になるようにベン図を変形していくと



$A\cap B$ が最小は
$A\cup B=U$ のとき

20

数字 1，2，3 を，123 のように重複なしに 1 個ずつすべて並べて 3 桁の整数を作るとき，その整数をすべて書き出せ。

123，132，213，231，312，321

21

大中小の 3 個のさいころを投げるとき，次の場合は何通りあるか。 (1)　目の和が 8 になる場合　　(2)　目の積が 12 になる場合　　(3)　目の大きさが，大中小の順に小さくなる場合

(1)　右の樹形図により　　21 通り

大 中 小
1—1—6, 2—5, 3—4, 4—3, 5—2, 6—1
2—1—5, 2—4, 3—3, 4—2, 5—1
3—1—4, 2—3, 3—2, 4—1
4—1—3, 2—2, 3—1
5—1—2, 2—1
6—1—1

(2)　右の樹形図により　　15 通り

大 中 小
1—2—6, 3—4, 4—3, 6—2
2—1—6, 2—3, 3—2, 6—1
3—1—4, 2—2, 4—1
4—1—3, 3—1
6—1—2, 2—1

(3)　右の樹形図により　　20 通り

大 中 小
6—5—4, 3, 2, 1
　4—3, 2, 1
　3—2, 1
　2—1
5—4—3, 2, 1
　3—2, 1
　2—1
4—3—2, 1
　2—1
3—2—1

22

1 個のさいころを 2 回投げるとき，目の和が次のようになる出方は何通りあるか。 (1)　6 または 9　　(2)　3 の倍数　　(3)　5 以下

出る目を (1 回目，2 回目) のように示す。

(1)　目の和が 6 になるのは，(1，5)，(2，4)，(3，3)，(4，2)，(5，1) の 5 通り。

目の和が 9 になるのは，(3，6)，(4，5)，(5，4)，(6，3) の 4 通り。

よって，和の法則により　　$5+4=9$ (通り)

(2)　目の和が 3 の倍数になるのは，和が 3，6，9，12 のときである。

目の和が 3 になるのは，(1，2)，(2，1) の 2 通り。

目の和が 6 または 9 になるのは，(1) から 9 通り。

目の和が 12 になるのは，(6，6) の 1 通り。

よって，和の法則により　　$2+9+1=12$ (通り)

(3)　目の和が 5 以下になるのは，和が 2，3，4，5 のときである。

目の和が 2 になるのは，(1，1) の 1 通り。

目の和が 3 になるのは，(2) から 2 通り。

目の和が 4 になるのは，(1，3)，(2，2)，(3，1) の 3 通り。

目の和が 5 になるのは，(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1) の 4 通り。

よって，和の法則により　　$1+2+3+4=10$ (通り)

23

バス停 A から B へ行くのに，4 種類のバス路線がある。A から B まで行って帰ってくるのに，次の各場合，往復に利用する路線の選び方は何通りあるか。 (1)　往復で同じ路線を利用してよい。　　　(2)　往復で同じ路線は利用しない。

(1)　A から B へ行く路線は　4 通り

そのどの場合に対しても，B から A へ帰る路線は　4 通り

よって，積の法則により　　$4\times4=16$（通り）

(2)　A から B へ行く路線は　4 通り

そのどの場合に対しても，B から A へ帰る路線は行きの路線以外の　3 通り

よって，積の法則により　　$4\times3=12$（通り）

24

次の式を展開したとき，項は何個できるか。 (1)　$(a+b)(x+y+z+u)$　　　　　(2)　$(a+b+c)(p+q)(x+y+z)$

(1)　$(a+b)(x+y+z+u)$ を展開したときの各項は次の形になる。

　(a か b の一方)×(x，y，z，u のいずれか 1 つ)

よって，積の法則により　　$2\times4=8$（個）

(2)　$(a+b+c)(p+q)(x+y+z)$ を展開したときの各項は次の形になる。

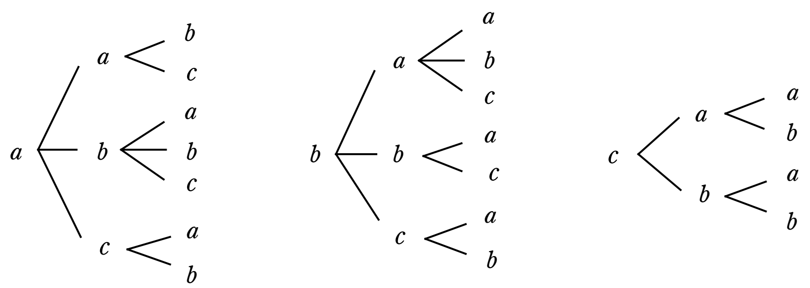
　(a，b，c のいずれか 1 つ)×(p か q の一方)×(x，y，z のいずれか 1 つ)

よって，積の法則により　　$3\times2\times3=18$（個）

25

5 個の文字 a，a，b，b，c から 3 個の文字を選んで，1 列に並べる方法は何通りあるか。

次の樹形図により　　18 通り



26

3 個のさいころを投げるとき，出る目の和が 11 になる場合は何通りあるか。ただし，さいころは区別しないで目の数だけを区別するものとする。

さいころの 3 つの目を a，b，c で表すと，さいころを区別しないので，3 つの目を小さい方から考えればよい。

a，b，c の和が 11 になる場合は，abc の順に

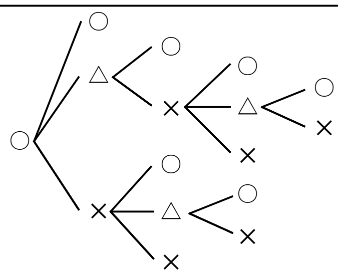
　　　146，155，236，245，335，344

よって　　6 通り

27

2 つのチーム A，B で優勝戦を行い，先に 2 勝した方を優勝チームとする。最初の試合で A が勝った場合，優勝が決定するまでの勝負の分かれ方は何通りあるか。ただし，試合では引き分けもあるが，引き分けの次の試合は必ず勝負がつくものとする。

A の勝ちを ○，引き分けを △，A の負けを × で表し，
優勝が決定するまでの勝負の分かれ方について，
樹形図をかくと右の図のようになる。
よって　10 通り

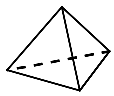


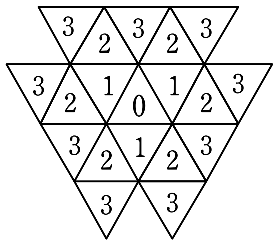
28

正四面体の 1 つの面を下にしておき，直前にいた場所を通らないように，1 つの辺を軸として 3 回転がす。次の数を求めよ。

(1)　転がし方の総数　　　　(2)　3 回転がした後の正四面体の位置の総数

右の図は，正四面体を転がした回数を，そのときの正四面体の位置に記入したものである。





(1)　1 回目の転がし方は　3 通り
そのどの場合に対しても，2 回目，3 回目は直前の場所を通らないようにして転がすから，転がし方はそれぞれ　2 通り
よって，求める転がし方の総数は
$3\times2\times2=12$ (通り)

(2)　右の図から，最後に正四面体がある位置の総数は　9 通り

29

次の数について，正の約数は何個あるか。

(1)　108　　　　(2)　288

(1)　$108=2^2\cdot3^3$ であるから，108 の正の約数は，2^2 の正の約数と 3^3 の正の約数の積で表される。
2^2 の正の約数は，1，2，2^2 の　3 個
3^3 の正の約数は，1，3，3^2，3^3 の　4 個
よって，積の法則により　$3\times4=12$ (個)

(2)　$288=2^5\cdot3^2$ であるから，288 の正の約数は，2^5 の正の約数と 3^2 の正の約数の積で表される。
2^5 の正の約数は，1，2，2^2，2^3，2^4，2^5 の　6 個
3^2 の正の約数は，1，3，3^2 の　3 個
よって，積の法則により　$6\times3=18$ (個)

別解　(1)　$108=2^2\cdot3^3$ であるから，108 の正の約数の個数は，$(2+1)(3+1)=3\cdot4=12$ (個)
(2)　$288=2^5\cdot3^2$ であるから，288 の正の約数の個数は，$(5+1)(2+1)=6\cdot3=18$ (個)

30

次の硬貨を全部または一部使って，ちょうど支払うことができる金額は何通りあるか。

(1)　10 円硬貨 5 枚，100 円硬貨 3 枚，500 円硬貨 3 枚

(2)　10 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 3 枚，100 円硬貨 4 枚

(1)　10 円硬貨 5 枚でできる金額は，　0 円，10 円，20 円，……，50 円 の　6 通り

100 円硬貨 3 枚でできる金額は，　0 円，100 円，200 円，300 円 の　4 通り

500 円硬貨 3 枚でできる金額は，　0 円，500 円，1000 円，1500 円 の　4 通り

よって，積の法則により　$6\times4\times4=96$（通り）

全部 0 枚の場合は支払うことができないから，これらの硬貨を使って，ちょうど支払うことができる金額は

$96-1=95$（通り）

(2)　100 円硬貨 4 枚を 50 円硬貨 8 枚でおき換える。

10 円硬貨 2 枚でできる金額は，　0 円，10 円，20 円 の　3 通り

50 円硬貨 11 枚でできる金額は，0 円，50 円，100 円，……，550 円の　12 通り

よって，積の法則により　$3\times12=36$（通り）

全部 0 枚の場合は支払うことができないから，これらの硬貨を使って，ちょうど支払うことができる金額は

$36-1=35$（通り）

31

大中小 3 個のさいころを投げるとき，目の和が偶数になる場合は何通りあるか。

3 個のさいころの目の和が偶数になるのは，次の [1]，[2] のいずれかである。

[1]　全部の目が偶数の場合

1 個のさいころで，偶数の目の出方は 2，4，6 の 3 通りである。

よって，積の法則により　$3\times3\times3=27$（通り）

[2]　1 個だけが偶数の場合

大のさいころだけが偶数の場合，残りの 2 個のさいころの目は奇数で，その出方はそれぞれ 1，3，5 の 3 通りである。

よって，積の法則により　$3\times3\times3=27$（通り）

中のさいころだけが偶数の場合，小のさいころだけが偶数の場合も同様に 27 通りであるから，1 個だけが偶数であるのは

$27+27+27=81$（通り）

よって，求める場合の数は，和の法則により

$27+81=108$（通り）

32

2 桁の自然数のうち，各位の数字の積が次のようになるものは何個あるか。

(1)　奇数になる。　　　(2)　偶数になる。

(1)　2 つの数字の積が奇数になるのは，2 つとも奇数の場合である。

よって，十の位，一の位ともに奇数のときで，それぞれ 1，3，5，7，9 の 5 通りずつあるから，

求める個数は，積の法則により　$5\times5=25$（個）

(2)　2 桁の自然数は 10 から 99 までの 90 個ある。

各位の数字の積が偶数になるものは，この 90 個から積が奇数になるものを除いて

$90-25=65$（個）