今週の数学の学習ポイント３　５月 第２週

こんにちは。今日から５月ですね。気温も高くなり，初夏の陽気ですね。散歩すると，気持ちよく汗がかけるでしょう。気晴らしに散歩やジョギングをするのもよいでしょう。体を動かすと，血流のめぐりが良くなるからか，頭も冴えわたるそうです。

４月２８日(火)に「学習ポイント２」をＵＰしています。この「学習のポイント３」は，来週５月４日(月)～８日(金)の週のポイントを挙げたものです。

目安としては，**数学Ⅰは第 12 回くらいまで，数学Ａは第８回くらいまで**でしょうか。

教科書の本文，例，例題，応用例題を理解したら，完成ノートの問題に取り組んでください。

（注　教科書の練習，補充問題，章末問題は取り組まなくてよいです。）

過去の取り組みで詰まっているところがあると思いますので，「３TRIAL 完成ノートポイント解説」をよく読んで復習もしておいてください。

「１歩進んで，振り返る」前回の復習をしつつ，次のステップに進みましょう。

今後の目安を以下に記載しておきます。

	数Ⅰ	教科書のページ数	完成ノートの問題番号	数A	教科書のページ数	完成ノートの問題番号
5/ 4～	第10回	p.27, 28, 29	43, 45 ～50	第７回	p.20	29, 30, 31, 32
	第11回	p.30，31	51, 52, 53, 54, 55	第８回	p.21, 22, 23	33, 34, 35, 36, 38
	第12回	なし	56, 57, 58, 59, 60, 61			

	数Ⅰ	教科書のページ数	完成ノートの問題番号	数A	教科書のページ数	完成ノートの問題番号
5/11～	第13回	p.32	62	第９回	p.24, 25, 26 応用例題 5	37, 40, 41, 42, 43, 45, 46
	第14回	p.34, 35, 36, 37	63, 64, 65	第10回	p.25 D，p.27	39, 44, 47, 48, 49, 50
	第15回	p.38, 39, 40	66, 67, 68, 71			

	数Ⅰ	教科書のページ数	完成ノートの問題番号	数A	教科書のページ数	完成ノートの問題番号
5/18～	第16回	p.41, 42	69, 70, 72, 73, 74	第11回	p.28, 29, 30	51, 52
	第17回	p.43 応用例題 6	75, 76, 77, 78	第12回	p.31, 32	53, 54, 57, 58, 59, 63
	第18回	p.44, 45	79 ～ 84 の 6 題			

	数Ⅰ	教科書のページ数	完成ノートの問題番号	数A	教科書のページ数	完成ノートの問題番号
5/25～	第19回	p.50 ～ 55 (特に 例 6)	85 ～ 94 の 10 題	第13回	p.33, 34	55, 56, 66
	第20回	p.56, 57, 58	95, 96, 97, 98	第14回	なし	60, 61, 62, 64, 65
	第21回	p.59, 60 のＥまで	99, 100, 101			

また，昨日ＵＰされた「37 回生情報」2020/4/30【１年生】で川添先生が書かれた内容の数学について

返信用封筒に入れてもらい返送してもらう物の中で，数学の学習に用いている

「３ＴＲＩＡＬ　数学Ⅰ　完成ノート【数と式，集合と命題】」

「３ＴＲＩＡＬ　数学Ａ　完成ノート【場合の数と確率】」

は，決して返送しないでください。５月中ずっと，この「完成ノート」で学習してもらうためです。

数学では，「アチーブメントテスト」のマークシートを返送してもらいます。

それ以外で返送してもらう物の詳細は，５月９日(土)以降に届くプリントで確認してください。

『数学Ⅰ』　第11回（教科書 p.30, 31　3 TRIAL 問題番号 51, 52, 53, 54, 55 ）

根号を含む式の加法，減法，乗法について

例22 (1)　$6\sqrt{2}+\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(6+1-3)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

これは，今まで学んできた文字を含む式の計算と同じように行うということである。

$6a+a-3a=(6+1-3)a=4a$　（ $\sqrt{2}$ を a とみたときと同じ計算ですね）

分母の有理化について

分数の分母に $\sqrt{\ }$ がついた式があるとき，

「分母・分子に同じ数を掛けても，分数の値は同じで変わらない」

という性質を利用して，分母から $\sqrt{\ }$ の無い式を作り出すことを「分母の有理化」と呼んでしたね。

分母の $\sqrt{\ }$ が単項式の場合の有理化

例　$\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\times2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

分母の $\sqrt{\ }$ が 2 項の多項式の場合の有理化（和と差の積の公式を利用）

例　$\dfrac{3}{2\sqrt{2}+1}=\dfrac{3\times(2\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2}+1)\times(2\sqrt{2}-1)}=\dfrac{3(2\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\dfrac{6\sqrt{2}-3}{8-1}=\dfrac{6\sqrt{2}-3}{7}$

分母の $\sqrt{\ }$ が 3 項の多項式の場合の有理化

これは，第 12 回の範囲にしていますが，先取りして見てみてもよいと思います。

完成ノート　p.56 例題 11　$\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ の分母の有理化

考え方 としましては，

1 回の有理化では， $\sqrt{\ }$ が 1 つしか消せないので，有理化を 2 回行う必要があります。

分母にある 3 項の多項式を，2 項の多項式として見るために，最初の 2 項に（　）をつけて

$\dfrac{1}{(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}}$ とします。$(1+\sqrt{6})$ をひとかたまりとみているのです。

この分母・分子に $(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}$ を掛ければ，分母の $\sqrt{7}$ が消せます。

$\sqrt{6}$ は残りますが，分母は $\sqrt{\ }$ を含んだ単項式になります。

ここで，もう一度 分母・分子に $\sqrt{6}$ を掛ければ，分母から $\sqrt{\ }$ が全部消せ，有理化完了です。

『数学Ⅰ』　第12回（教科書 なし　3 TRIAL 問題番号 56, 57, 58, 59, 60, 61 ）

完成ノート p.53 例題 9 について

$x=\sqrt{2}+\sqrt{6}$， $y=\sqrt{2}-\sqrt{6}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$x+y$　(2)　xy　(3)　x^2+y^2　(4)　x^3y+xy^3　(5)　x^3+y^3

(3) 以降の考え方

x^2+y^2 の式に，$x=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$y=\sqrt{2}-\sqrt{6}$ を代入しても勿論よいのですが，(1)，(2) の結果を使えば計算ミスしにくくなります。それは，

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ という展開公式を覚えていますね。これを利用します。

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

$(x+y)^2-2xy=x^2+y^2$

したがって，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ となります。これは公式にします。

同様に

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ ですから

$(x+y)^3=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$

$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

$(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3$

したがって，$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ となります。これも公式にします。

上記の導き方を理解し，覚えましょう。

公式　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$　　2 乗の和＝(2 項の和)^2－(2 項の積)の 2 倍

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$　　3 乗の和＝(2 項の和)^3－(2 項の積)の 3 倍に (2 項の和)を掛けたもの

これらを利用することが，大事です。

完成ノート p.55 例題 10 の前に「整数部分と小数部分」について

例えば，次の数の整数部分と小数部分を考える。

(1)　1.4

整数部分は，1　小数部分は，0.4

(2)　$\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ は 1 より大きく，2 より小さいことは知っていますね。

よって，$\sqrt{2}$ の整数部分は，1

では，小数部分は何と答えればよいでしょうか。

$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ だから，$0.41421346\cdots$ と答えるのでしょうか。

しかし，この答え方は $\sqrt{2}$ の近似値を知っている人しか答えられません。

知らない人でも答えられる答え方を紹介します。それは，

（小数部分）＝（与えられた数）－（その数の整数部分）

という答え方です。これならば，近似値を知らなくても簡単に答えられます。

ですので，$\sqrt{2}$ の小数部分は $\sqrt{2}-1$ と答えます。

このことを知っておけば，完成ノート p.55 例題 10 の解答 が納得できると思います。

『数学Ａ』　第８回（教科書 p.21 ～ 23　3 TRIAL 問題番号 33, 34, 35, 36, 38 ）

順列

いくつかのものを順に 1 列に並べるとき，その並び 1 つ 1 つのことを指す。

$\boxed{例}$ 4 個の文字 a，b，c，d のうち異なる 3 個を取り出して並べる順列を考える

教科書 p.21 の樹形図から書き並べると abc ，abd ，acb ，acd ，……，dcb

これら 1 つ 1 つを a，b，c，d から異なる 3 個取る順列といいます。

順列の総数

考えられる順列の数のこと。言い換えれば，いくつかのものを順に 1 列に並べるとき，考えられる並べ方の総数のこと。上の$\boxed{例}$ では，積の法則 $4\cdot3\cdot2=24$ (通り) あることが，書き並べなくても計算で求められる。

順列の総数を表す記号

順列は英語で「Permutation (パーミュテーション)」というらしく，その頭文字「P」を用いて，新たに「順列の総数」の記号を考えました。それが，${}_n\mathrm{P}_r$ です。

意味は「異なる n 個のものの中から異なる r 個を取り出して 1 列に並べる並べ方の総数」を表します。

教科書では，少しだけ略して「**n 個から r 個取る順列の総数**」

上の$\boxed{例}$では，「${}_4\mathrm{P}_3$」 と書けば，「4 個から 3 個取る順列の総数」を意味しているんだと読み取ってください。

ここで，「${}_4\mathrm{P}_3$」の読み方ですが，「よん ピー さん」です。他にも「ピーのよん さん」という人もいます。

私は前者の言い方をします。そして，「${}_4\mathrm{P}_3$」は「$4\cdot3\cdot2$ 」という計算につながります。当然そうなるでしょう。

逆にいうと，「${}_4\mathrm{P}_3$」という記号は，ちょっとカッコつけた (正しくは「格好つけた」) 書き方なだけなんです。

最初のうちは，書きなれていなくて戸惑います。今は，この記号の意味が分かれば十分。

「4 個から 3 個取る順列の総数」は「$4\cdot3\cdot2=24$ (通り) 」と計算できることの方が，断然，大事です。これを、カッコつけて「4 個から 3 個取る順列の総数」は「${}_4\mathrm{P}_3=4\cdot3\cdot2=24$ (通り) 」と書いているだけなのです。

教科書 p.22 「${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ 」も難しく見えるのは，文字を 3 つも使っているからです。

具体的に数字をいれたら「${}_4\mathrm{P}_3=4\cdot3\cdot2$ 」一気に見やすくなりますね。

単に，「${}_4\mathrm{P}_3=$ (4 から始め，1 ずつ減らした 3 個の数の積) 」と日本語に言い直しながら書けばいいのです。

階乗（かいじょう）

1 から順に 1 ずつ大きくした数の積のこと。 $1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots$ のこと。終わりがないと計算すらできませんね。

そこで，「n の階乗」が登場。「$1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot n$ 」と終わりを決めました。でも n なので，終わりはその都度具体的に決められる状態にしています。また，この単元では，「1 ずつ減らして掛ける」が主ですので，階乗の計算も掛ける順序を入れ替えて「$n\cdot\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ 」と書くことにします。掛ける順を入れ替えても，積は変わりませんからね。「$n\cdot\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ 」では，1 ずつ減らして掛けることが伝わりづらいので，

「$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ 」とします。

階乗の記号

「n の階乗」は「$n!$ 」と書きます。ビックリしましたね！ の「！」をつかうのです！

だから，何人かの高校生は「$n!$ 」を「エヌビックリ」，「$4!$ 」などを「よんビックリ」などと読むんです。

「！」　は日本語では「ビックリマーク」が主流かな。

英　語では「exclamation mark (エクスクラメーション マーク)」が正式みたいです。

「階乗」は英　語で　「factorial (ファクトリアル)」と言います。どちらにしても言いにくいので，単に

「$n!$ 」は「n の階乗」と呼べばよいと思います。格好つけて「えぬファクトリアル」と呼ばなくてもよいのです。

「えぬビックリ」は，ちょっと恥ずかしいような気がしますが，止めはしません。

結局は，単なる記号。計算でき，意味が分かるほうが断然大事。

n!は「1から順に1ずつ増やした数の積」あるいは「n から順に1ずつ減らし，1までの積」という意味。
また，特殊な順列ですが「n 個から n 個取る順列の総数」は，${}_nP_n$ と書きますが，n！も同じ計算になります。
ですので，教科書p.23 例 5「4人の生徒全員を1列に並べる方法の総数」は「$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$(通り)」と書いているのです。

ここで，よく出てくる階乗の結果は，6! くらいまで覚えておけば，時間短縮になります。

$1! = 1$	(当然ですね)
$2! = 2$	(そのまんま)
$3! = 6$	(まぁ、$3 \cdot 2 \cdot 1$ ですから計算しても，それほどでもない)
$4! = 24$	(上で計算した通りですから，もう何度も見ています)
$5! = 120$	(初登場。これなら，覚えたほうが速そう)
$6! = 720$	(120 に 6 掛けただけですから。当たり前ですね)
$7! = 5040$	(同じく 720 に 7 を掛けただけ。暗算できなくても，筆算すればよいでしょう)
$8! = 40320$	(もう同じように掛けていけばいいですよね。覚える必要はないでしょう)
$9! = 362880$	(これ覚えていたら階乗を一つの趣味にしているレベルですね)
$10! = 3628800$	(9! を覚えていたら，末尾に 0 を追加するだけ)

教科書 p.23 例題 4

1 から 10 までの 10 枚の番号札がある。この番号札のうち 3 枚をA，B，C の 3 人に 1 枚ずつ配るとき，配り方は何通りあるか。

別解　A に配る 1 枚の選び方は，10 通り
引き続き，B に配る 1 枚の選び方は，9 通り　(A には，何か 1 枚は配っているため)
さらに引き続き，C に配る 1 枚の選び方は，8 通り　(A，B に，何か 1 枚ずつ既に配っているため)
積の法則より　$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$(通り)

解説　上の解答は，教科書の解答とは少し違います。教科書の解答は，

解答　10 枚から 3 枚を選んで 1 列に並べる順列の総数と同じである。
よって，配り方の総数は，${}_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$(通り)

としている。つまり，配り方と 1 列に並べるのとを同一視できることに注目した解答です。
慣れてくれば，教科書の様な，秀逸な考え方ができるようになりますので，完成ノートでしっかり身に付けていけると思います。