

# 星形ナンプレの初期ヒント最少個数

The minimum number clues for the star-shaped number puzzles

兵庫県立三田祥雲館高等学校

## 基本ルール

星形ナンプレの基本ルールとして、以下を定める。

1. 同色の正三角形9マスで構成されるブロック(図1)、列(図2)には、1~9の数字が1回ずつ入る。
2. (1)に従って、すべてのマス埋める。

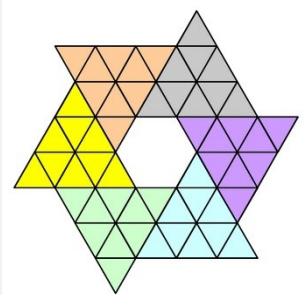


図1 星形ナンプレ ブロック

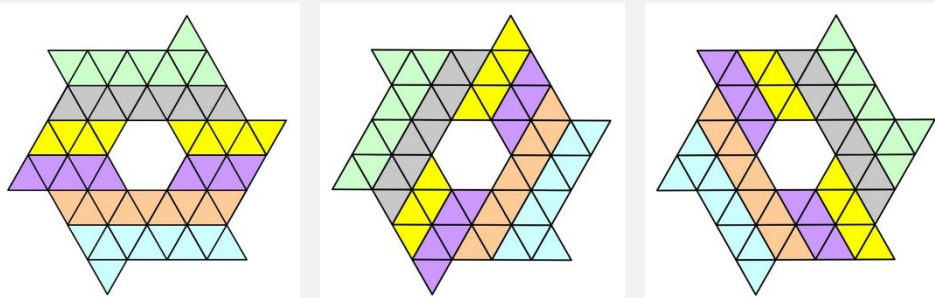


図2 星形ナンプレ 列

## 星形ナンプレの定義

### 置換

盤面の2種の数字をすべて入れ替えること  
(図3と図4の赤文字7と9が置換されている)

### 初期ヒント

各問題に最初から配置されている数字

### 完成盤面

すべてのマスに数字が入っていて、基本ルールを満たしている盤面(図5)

### 問題盤面

完成盤面を1つだけしか作成できない盤面(図6)

### 探索

ある盤面が問題盤面であるか確かめること

### 本質的同一盤面

回転や数字の置換で、他の盤面と一致する盤面(図3、図4)

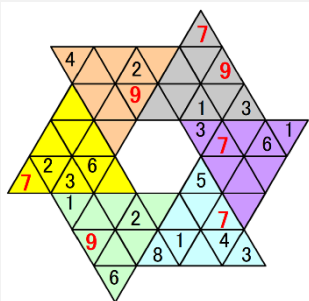


図3 置換前盤面

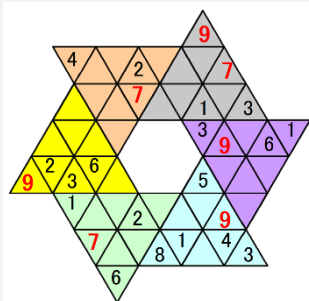


図4 置換後盤面

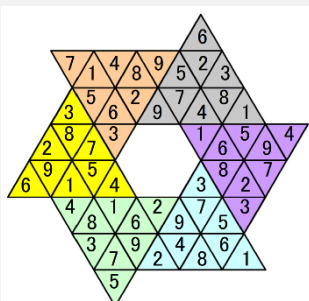


図5 完成盤面 例

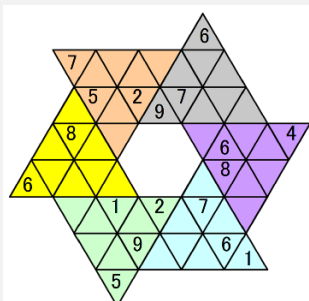


図6 問題盤面 例

## 補題 1

(図7)に関して  
同色2マスには、必ず同じ数字が入る。

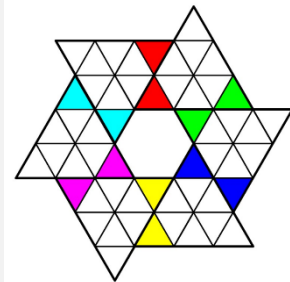


図7 補題1の該当箇所

## 補題 2

(図8)に関して

- 同色2マスのどちらかには初期ヒントが入る。
- 同色マス内の数字を入れ替えた盤面も本質的同一盤面であると定義する。

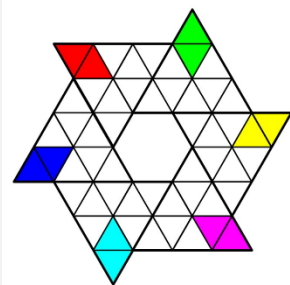


図8 補題2の該当箇所

## 補題 3

(図9)は、1つの完成盤面である。(図10)は、(図9)中の赤丸内の2種の数字を入れ替えた盤面である。2つの盤面は、本質的同一盤面に該当しない。

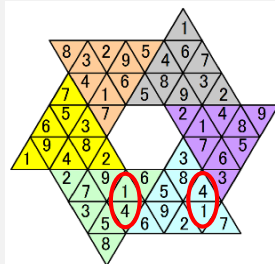


図9 入れ替え前

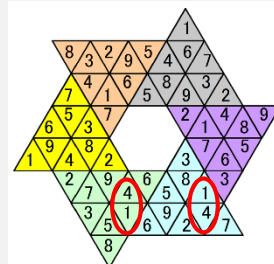


図10 入れ替え後

(図11)で示された2つの同色円内の数字が2種である場合、同様のことが成り立つ。

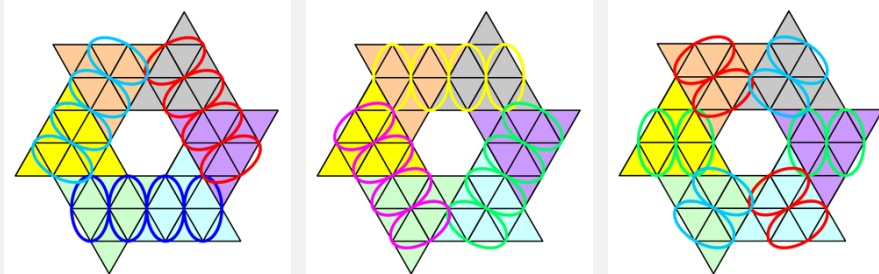


図11 補題3 該当箇所

## 定理

### 星形ナンプレの初期ヒント最少個数は9個である。

【証明】初期ヒント数7以下の問題盤面は存在しない。初期ヒント数8の問題盤面は補題1、補題2、補題3を利用して、問題盤面がないことを示せる。初期ヒント9の問題盤面は存在する(図12)。

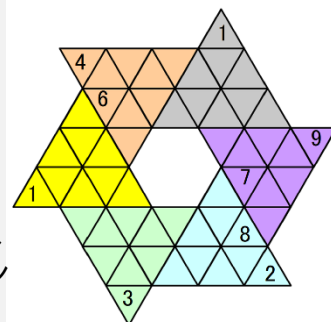


図12 初期ヒント数9の問題盤面

## 結論

本研究では、星形ナンプレの初期ヒント最少個数が9個であることを証明した。

## 本質的同一盤面の探索 証明

### (1) 置換による本質的同一盤面の探索

(図13)(図14)はそれぞれ8と9をいれかえた完成盤面であり、本質的同一盤面でもある。このとき、すべての数字を文字で置き換えたものは、どちらも(図15)となりえる。

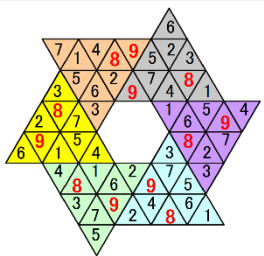


図13

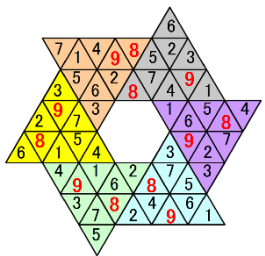


図14

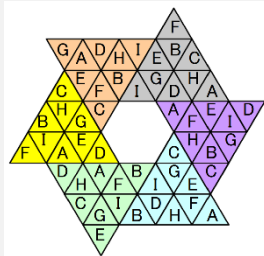
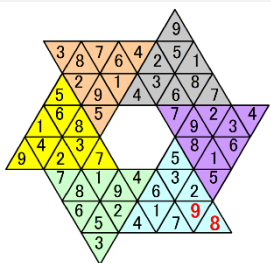


図15

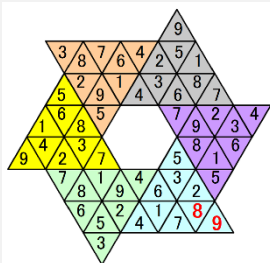
このため、(図13)と(図14)で初期ヒントの場所を同じにしても、(図15)で代入する数字を変えただけなので、探索結果は同じである。

### (2) (補題2)による本質的同一盤面の探索

(図16)(図17)は右下端の8と9を入れ替えた完成盤面であり、本質的同一盤面である。このとき、端の数字の変化による他のマスの変化はないため、端の初期ヒントの位置を交換した盤面の探索結果は、もとの盤面と同じになる。



(左) 図16  
(右) 図17



## 補題1 証明

まず、(図18)の示す左下4マスを[A]とする。すると、列とブロックから(図19)が示す、[A]以外の数字の入る[B]を定めることができる。右のブロックを見ると、ブロックから(図20)の青枠部分に[A]が入ることがわかる。また列から、(図20)の赤枠部分にも[A]が入ることがわかる。このことから、橙色斜線部分が重なっているため、重なっていない緑色斜線部分に同じ数字が入る。これは回転させても成り立つため、他の6か所でも成り立つ。

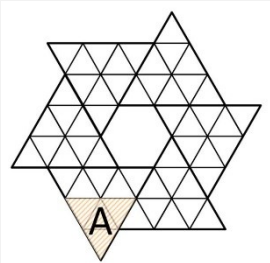


図18

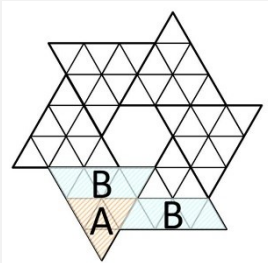


図19

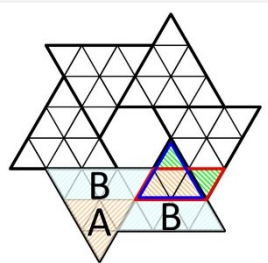


図20

## 補題2 証明

(図21)は右下の赤枠部分だけ埋まっていない盤面である。{1, 4}が入っていないが、どちらの入れ方でも完成盤面となるため、完成盤面が2つ以上作成可能である(図21)は、問題盤面の条件を満たさない。よって、端の2マスのうちどちらかに初期ヒントを含む。また、これは回転させても成り立つため、他の6箇所でも成り立つ。

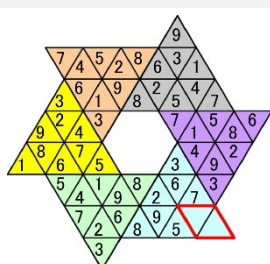


図21

## 補題3 証明

(図9)と(図10)は同色円で囲んである4マスを除くすべてのマスは変化していない。また、特定の4マスを入れ替えても、列、ブロックに同じ数字の重複は現れないため、どちらも完成盤面であると言える。また、置換や回転、(補題2)による端2マスの入れ替え、これらを使用しても盤面の一致はできないため、(補題3)を適用した盤面は元の盤面と本質的同一盤面に該当しない。

## 定理 証明

### 『初期ヒント数7以下の問題盤面』

初期ヒントに含まれる数の種類が7以下の場合、例えば(図22)の盤面であるとき、完成盤面は(図23)と(図24)の2種存在している。この2種は、初期ヒントに含まれていない2種、8と9が入れ替わっているだけである。

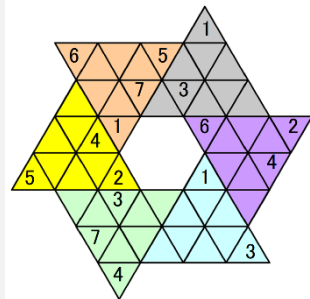


図22

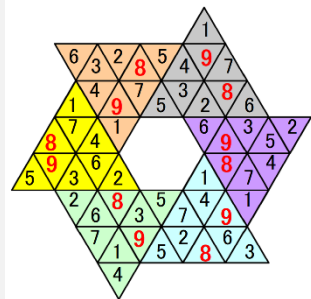


図23

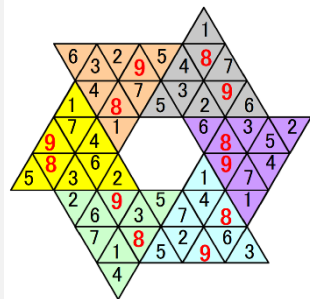


図24

他の初期ヒントに含まれる数の種類が7以下の盤面でも同様に、初期ヒントに含まれなかった2種以上の数字の入れ替えによって完成盤面が2つ以上作成可能であるため、そのような盤面は問題盤面としての条件を満たさない。以上のことから、初期ヒントの数の種類が7種未満の問題盤面は存在せず、初期ヒント数7以下の問題盤面も存在しない。

### 『初期ヒント数8の星形ナンプレ 盤面個数』

本質的同一盤面は、そのうちの1つを探索したら、そのほかの盤面の探索結果は同じになる。そのため、本質的同一盤面ではない盤面の個数を求めることにより、探索回数の削減が可能である。

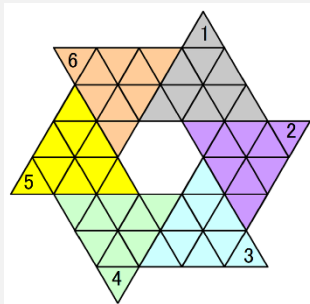


図25 端固定盤面

- ・置換により、使用する数字を1~8の8種に固定できる。
- ・(補題2)から、(図25)のように、端に初期ヒント数字を固定できる。
- ・端に入れる数字は置換により(図25)のように、1~6と固定ができる。
- ・本質的同一盤面を考慮すると、(図26)の青斜線部分に7が、赤太枠部分に8が入るように制限ができる。

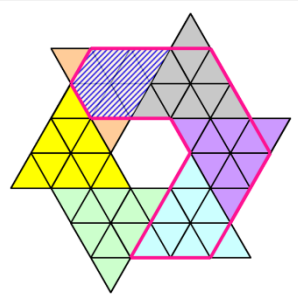


図26 7,8該当箇所

以上の点を踏まえると、盤面個数は下の計算式の数以下となる。

$${}_7C_2 + 7 \times (7 \times 3) = 168 \text{ (通り)}$$

## 参考文献

- [1] 井上真大, 奥乃博, “本質的に異なる数独解盤面の列挙と番号付け,” 情報処理学会全国大会講演論文集, Vol.71, No.4, pp.4.741-4.742, 2009.  
[2] Gary McGuire, Bastian Tugemann, Gilles Civario, “There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem”, arXiv:1201.0749v2, 2013.